Lösung Blatt 2 - Hausaufgaben

October 26, 2011

Aufgabe 3: Impulsdarstellung und Unschärferelation

Impulsdarstellung

Die Impulsdarstellung der Wellenfunktion eines Teilchens im Gausszustand $|\Psi\rangle$, $\tilde{\Psi}(p) = \langle p|\Psi\rangle$, erhalten wir per Fouriertransformation aus der Ortswellenfunktion (siehe Fig. 1)

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \langle x|\Psi\rangle \\ &= \underbrace{\mathcal{N}}_{(2\pi\sigma^2)^{-1/4}} \; e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{4\sigma^2}+ik_0x}. \end{aligned} \tag{1}$$

Formal verwenden wir die Identität $\hat{I} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |x\rangle\langle x|$, sowie $\langle x|p\rangle = \frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(p) &= \langle p|\Psi\rangle \\ &= \langle p| \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx|x\rangle\langle x|}_{=\hat{I}} |\Psi\rangle \\ &= \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{4\sigma^2}+i(k_0-\frac{p}{\hbar})x}. \end{aligned} \tag{2}$$

Das Gauss-Integral löst man durch **quadratische Ergänzung**. Es ergibt sich

$$\tilde{\Psi}(p) = \mathcal{N}\sqrt{\frac{2\sigma^2}{\hbar}} e^{i(k_0-\frac{p}{\hbar})\bar{x}-\sigma^2(k_0-\frac{p}{\hbar})^2}. \tag{3}$$

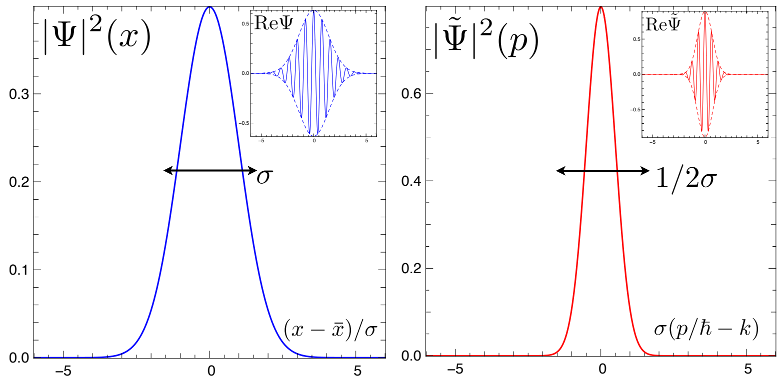

Figure 1: Plot des Gaussschen Wellenpackets in Orts- und Impulsraumdarstellung.

Breite der Verteilung im Ortsraum

Zunächst betrachten wir $\Delta x^2 \equiv \langle\Psi|\hat{x}^2|\Psi\rangle - \langle\Psi|\hat{x}|\Psi\rangle^2$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\Delta x^2 &= \langle\Psi|\int_{-\infty}^{\infty} dx\,|x\rangle\langle x|\hat{x}^2|\Psi\rangle - \left[\langle\Psi|\int_{-\infty}^{\infty} dx\,|x\rangle\langle x|\hat{x}|\Psi\rangle\right]^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2|\Psi|^2(x) - \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x|\Psi|^2(x)\right]^2 \\
&= \mathcal{N}^2\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2 e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} - \bar{x}^2 \\
&= \mathcal{N}^2\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad (4)\\
&= -\mathcal{N}^2\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2}. \qquad (5)
\end{aligned}$$

In der letzten Zeile haben wir $\alpha \equiv 1/(2\sigma^2)$ eingeführt. Schliesslich folgt

$$\begin{aligned}
\Delta x^2 &= -\mathcal{N}^2\partial_\alpha\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \\
&= \sigma^2. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Breite der Verteilung im Impulsraum

Die Breite im Impulsraum berechnet sich zu

$$\Delta p^2 = \langle\Psi|\int_{-\infty}^{\infty} dp\,|p\rangle\langle p|\hat{p}^2|\Psi\rangle - \langle\Psi|\int_{-\infty}^{\infty} dp\,|p\rangle\langle p|\hat{p}|\Psi\rangle^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathcal{N}^2 \frac{2\sigma^2}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, p^2 e^{-\frac{2\sigma^2}{\hbar^2}(p-\hbar k_0)^2} - \hbar^2 k_0^2 \\
&= -\mathcal{N}^2 \frac{2\sigma^2}{\hbar} \frac{\partial}{\partial\tilde{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{-\tilde{\alpha}p^2} \\
&= \frac{\hbar^2}{4\sigma^2}. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Damit gilt

$$
\sqrt{\Delta x^2}\sqrt{\Delta p^2} = \frac{\hbar}{2}. \qquad (8)
$$

Demnach ist die Unschärfe im Gauss-Packet **minimal** (siehe Aufgabe 2).

Aufgabe 4: Heisenbergsche Bewegungsgleichungen

Die Dynamik, d.h., Impuls und Ort, eines Teilchens im Potential $V(\hat{x})$ ist bestimmt durch die Heisenberg-Gleichung. Für den Impulsoperator gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{p} &= \frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{p}] \\
&= -\frac{i}{\hbar}[\hat{p},V(\hat{x})] + \frac{i}{\hbar}\underbrace{[\hat{p}^2,\hat{p}]}_{0} \\
&= -\left.\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}}. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Die letzte Zeile folgt aus der allgemeinen Relation $[\hat{p}, f(\hat{x})] = -i\hbar f'(\hat{x})$.

Der Ortsoperator erfüllt ferner

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{x} &= \frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{x}] \\
&= -\frac{i}{\hbar}[\hat{x},\frac{\hat{p}^2}{2m}] \\
&= \frac{\hat{p}}{m}, \qquad (10)
\end{aligned}
$$

wobei verwendet wurde, dass $[\hat{x}, f(\hat{p})] = i\hbar f'(\hat{p})$.

Für die **mittlere Kraft**, welche auf das Teilchen wirkt, gilt dann schliesslich (in Analogie zum klassischen Resultat)

$$
\frac{d}{dt}\langle\Psi(t)|\hat{p}|\Psi(t)\rangle = \left\langle \Psi \left| \frac{d}{dt}\hat{p}(t) \right| \Psi \right\rangle
$$

$$= \quad -\left\langle \Psi \left| \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}} \right| \Psi \right\rangle . \tag{11}$$