Statistische Physik und Thermodynamik

WS 2010/2011, Studienziel Bachelor, TP-4

Dozent: F. Marquardt   Übungen: B. Kubala

Übungsblatt 11

Abgabe: 27.01. 2011

Präsenzaufgaben

Aufgabe 22 : Klassisches Gas

a) Für die Entropie eines Gases mit f Freiheitsgraden (z. B. $f = 3$ für ein einatomiges Gas) haben wir in der statistischen Physik den Ausdruck

$$S = Nk_B \left[\ln V/V_0 + \frac{f}{2} \ln T/T_0 - \ln N + \text{ Quantenkorrekturen} \right]$$

gefunden. Finden Sie für ein klassisches Gas die Temperatur $T(V)$ für eine adiabatische Volumenänderung.

b) Betrachten Sie einen thermisch isolierten Gasbehälter. Durch das plötzliche Entfernen einer Trennwand kann ein ideales einatomiges Gas frei (nichtadiabatisch) vom Volumen V_1 in ein Volumen V_2 expandieren. Berechnen Sie die Änderung der Entropie.

Danach werde das Gas adiabatisch wieder auf sein ursprüngliches Volumen V_1 komprimiert. Bestimmen Sie die Endtemperatur des Gases.

c) Wir wollen am Beispiel eines idealen einatomigen Gases mit $E = \frac{3}{2}Nk_BT$ und $pV = Nk_BT$ explizit zeigen, dass die Wärme Q keine Zustandsgröße ist, es also keine Funktion $Q(T, V)$ gibt. Bestimmen Sie dazu die Größen Q_T und Q_V in dem Ausdruck $\mathrm{d}Q = Q_T\mathrm{d}T + Q_V\mathrm{d}V$, indem Sie die Wärmeänderung $\mathrm{d}Q$ bei

(i) einer isothermen Expansion und   (ii) bei einer isochoren ($\mathrm{d}V = 0$) Erwärmung betrachten.

Drücken Sie Q_T und Q_V durch die Variablen T und V (und ohne S und p) aus. Welche Bedingung sollten Q_T und Q_V erfüllen, falls tatsächlich eine Funktion $Q(T, V)$ existieren würde, deren Differential $\mathrm{d}Q$ ist. Zeigen Sie, dass diese Bedingung verletzt ist.

Aufgabe 23 : Reversibler Temperaturausgleich

Wir betrachten zwei Metallblöcke mit konstanten Volumina, Wärmekapazitäten C_1 und C_2 und Anfangstemperaturen von $T_1^0 < T_2^0$. Das Gesamtsystem sei wärmeisoliert.

a) Die beiden Körper werden in thermischen Kontakt zueinander gebracht und tauschen (irreversibel) Wärme aus bis sie eine gemeinsame Endtemperatur T_{mix} erreicht haben. Berechnen Sie T_{mix} und über $C = T\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T}$ die Entropiezunahme des Systems.

b) Der Temperaturausgleich zwischen zwei Körpern kann auch reversibel erfolgen durch eine Wärmekraftmaschine, die in einem infinitesimalen Carnotprozess eine kleine Wärmemenge $\mathrm{d}Q_2$ vom warmen Reservoir abführt, adiabatisch zum anderen Block transportiert, und dort eine Wärmemenge $\mathrm{d}Q_1$ abgibt. Die Arbeit, die dieser ideale Carnot-Kreisprozess liefert, wird gespeichert. Dieser Carnotprozess werde solange durchgeführt bis eine gemeinsame Temperatur T_f der beiden Blöcke erreicht ist. Berechnen Sie T_f und zeigen Sie, dass $T_f \leq T_{\text{mix}}$ für $C_1 = C_2$.

c) Berechnen Sie die Entropiezunahme des Systems, wenn es von T_f auf T_{mix} erwärmt wird und vergleichen Sie mit a).

d) Berechnen Sie die beim gesamten Carnotprozess gespeicherte Arbeit, indem Sie über die infinitesimalen Prozesse integrieren. Dazu müssen Sie zunächst die Temperatur eines Reservoirs durch die Temperatur des anderen ausdrücken.

e) Die Arbeit wird nun in Wärme umgewandelt und genutzt, um die Blöcke von der Temperatur T_f ausgehend gemeinsam zu erwärmen. Welche Endtemperatur wird erreicht?

Hausaufgaben

Hausaufgabe 22 : Wärmepumpe *(4 Punkte)*

Ein Haus wird mit einer Wärmepumpe, die Wärme aus einem Fluss der Temperatur T_0 zieht, auf die Temperatur T_1 geheizt. Die Wärmepumpe arbeitet ideal und verbraucht eine Leistung P. Nehmen Sie an, dass das Haus Wärme mit einer Rate $\alpha(T_1 - T_0)$ verliert.
a) Berechnen Sie die Temperatur T_1.
b) Das Haus kann alternativ mit einer konventionellen Heizung beheizt werden, die die Leistung P perfekt in Wärme umsetzt. Welche Temperatur T_1' wird nun erreicht?
c) Berechnen Sie für $\alpha = 500\ W/K$ die benötigten Leistungen einer Wärmepumpe und einer konventionellen Heizung für $T_0 = 10°C$ und $T_1 = 20°C$.

Hausaufgabe 23 : Dieselmotor *(8 Punkte)*

Ein idealisierter Dieselmotor kann als ein Kreisprozess zwischen 4 Punkten im $p - V$ Diagramm beschrieben werden in dem die folgenden Schritte durchgeführt werden:

$1 \to 2$: adiabatische Verdichtung von Luft.

$2 \to 3$: Im Punkt 2 wird Dieselöl eingespritzt, das sich sofort selbst entzündet und unter isobarer Erwärmung verbrennt. Dabei vergrößert sich das Zylindervolumen von V_2 auf V_3.

$3 \to 4$: Das Gas leistet dann unter adiabatisch Entspannung Arbeit.

$4 \to 1$: Am Punkt 4 wird das Ventil geöffnet, so dass sich der Druck bei gleichbleibendem Volumen auf den Aussendruck verringert. Nach dem Austausch des verbrannten Gemisches durch frische Luft beginnt der Prozess erneut.

a) Skizzieren Sie den Kreisprozess im $p-V$ Diagramm und deuten Sie an, in welchen Schritten Arbeit verrichtet und Wärme ausgetauscht wird. Die Luft und das Luft-Öl Gemisch seien als ideales Gas mit $\gamma = C_p/C_V > 1$ zu betrachten, wobei $C_{p/V}$ die temperaturunabhängige Wärmekapazitäten des Gases für eine Erwärmung bei konstantem Druck, bzw. bei konstantem Volumen bezeichnet. Bei einer Erwärmung bei konstantem Druck gilt dabei $\Delta Q = C_p \Delta T$.
b) Berechnen Sie die im Kreisprozess geleistete Arbeit W und die dem Arbeitsgas zugeführte Wärme Q sowie den Wirkungsgrad $\eta_D = W/Q$ des Dieselmotors abhängig von den Temperaturen an den Punkten 1-4. Dabei ist es günstig, die geleistete Arbeit nicht direkt zu berechnen, sondern auszunützen, dass die Energie des Arbeitsgases nach einem kompletten Kreisprozess wieder ihren Anfangswert erreicht.
(Zwischenergebnis: $\eta_D = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$)
c) Der Dieselmotor arbeitet zwischen 4 Temperaturen $T_3 > T_2 > T_4 > T_1$. Zeigen Sie, dass der bekannte Wirkungsgrad einer Carnotmaschine η_C, die zwischen der maximalen Temperatur T_3 und der minimalen Temperatur T_1 des Dieselmotors arbeitet, größer als der Wirkungsgrad des Dieselmotors ist, $\eta_C \geq \eta_D$. Drücken Sie dazu zunächst η_D durch die Größen $\alpha = V_3/V_2$ und $v = V_1/V_2$ sowie durch γ aus.
(Zwischenergebnis: $\eta_D = 1 - \frac{1}{\gamma} v^{1-\gamma} \frac{\alpha^\gamma - 1}{\alpha - 1}$)