# Blatt 9 Lösung der Hausaufgabe

## 2.) Dichte Korrelationen im BEC

Es gilt:
$$\hat{a}_j = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_k e^{ikj}\, \hat{b}_k$$
$$\hat{a}_j^+ = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_k e^{-ikj}\, \hat{b}_k^+$$
$$\hat{n}_j = \frac{1}{M} \sum_{k,k'} e^{ij(k-k')}\, \hat{b}_{k'}^+ \hat{b}_k$$

$M$: Anzahl der Gitterplätze

$$\langle\psi|\hat{n}_j|\psi\rangle = \frac{1}{M}\sum_{k,k'} e^{ij(k-k')} \underbrace{\frac{1}{N!} \underbrace{\langle 0|(\hat{b}_0)^N \hat{b}_{k'}^+ \hat{b}_k (\hat{b}_0^+)^N|0\rangle}_{= N\,\delta_{k0}\,\delta_{k'k}\,\langle 0|(\hat{b}_0)^N(\hat{b}_0^+)^N|0\rangle}}_{= N\,\delta_{k0}\,\delta_{k'k}}$$

$$= \underline{\frac{N}{M}}$$

$$\langle\psi|\hat{n}_j^2|\psi\rangle = \frac{1}{M^2}\sum_{k,k',k'',k'''} e^{ij(k-k'+k''-k''')} \cdot \frac{1}{N!} \langle 0|(\hat{b}_0)^N \hat{b}_{k'''}^+ \hat{b}_{k''} \hat{b}_{k'}^+ \hat{b}_k (\hat{b}_0^+)^N|0\rangle$$

mit $\hat{b}_{k'''}^+ \hat{b}_{k''} \hat{b}_{k'}^+ \hat{b}_k = \delta_{k',k''}\, \hat{b}_{k'''}^+ \hat{b}_k + \hat{b}_{k'''}^+ \hat{b}_{k'}^+ \hat{b}_{k''} \hat{b}_k$

$$= \frac{1}{M^2}\sum_{k,k',k'',k'''} e^{ij(k-k'+k''-k''')} \cdot \frac{1}{N!}\Big[\delta_{k',k''}\, N\, \delta_{k0}\, \delta_{k,k'''} + \delta_{k,0}\,\delta_{k,k''}\,\delta_{k',0}\,\delta_{k''',k'}\, N(N-1)\Big] \cdot \langle 0|(\hat{b}_0)^N(\hat{b}_0^+)^N|0\rangle$$

$$= \frac{M \cdot N}{M^2} + \frac{N(N-1)}{M^2} = \underline{\frac{N}{M} + \frac{N(N-1)}{M^2}}$$

$$\mathrm{Var}\,\hat{n}_j = \langle \hat{n}_j^2 \rangle - \langle \hat{n}_j \rangle^2$$

$$= \frac{N}{M} + \frac{N(N-1)}{M^2} - \frac{N^2}{M^2} = \frac{N}{M} - \frac{N}{M^2} = \underline{\frac{N}{M}\left(1 - \frac{1}{M}\right)}$$

Für eine große Anzahl von Gitterplätzen ist

$\mathrm{Var}\,\hat{n}_j \approx \langle \hat{n}_j \rangle$ (für einen kohärenten Zustand gilt $\langle n_j \rangle = \mathrm{Var}\,\hat{n}_j$ )

$$\langle \psi | \hat{n}_\ell \hat{n}_j | \psi \rangle = \frac{1}{M^2} \sum_{k,k',k'',k'''} e^{ij(k-k')} e^{i\ell(k''-k''')}$$

$$\frac{1}{N!} \langle 0 | (\hat{b}_0)^N \hat{b}^+_{k'''} \hat{b}_{k''} \hat{b}^+_{k'} b_k (\hat{b}^+_0)^N | 0 \rangle$$

$$= \frac{1}{M^2} \sum_{k,k',k'',k'''} e^{ij(k-k')} e^{i\ell(k''-k''')}$$

$$\{ \delta_{k',k''} N \delta_{k,0} \delta_{k,k'''} + N(N-1) \delta_{k,0} \delta_{k,k''} \delta_{k',0} \delta_{k',k'''} ]$$

$$= \frac{N}{M^2} \underbrace{\sum_{k'} e^{ik'(\ell-j)}}_{M \cdot \delta_{\ell j}} + \frac{N(N-1)}{M^2}$$

$$= \frac{N}{M} \delta_{\ell j} + \frac{N(N-1)}{M^2}$$

$$\langle (\hat{n}_j - \langle \hat{n}_j \rangle)(\hat{n}_i - \langle n_i \rangle) \rangle$$

$$= \langle \hat{n}_j \hat{n}_i \rangle - \langle \hat{n}_j \rangle \langle \hat{n}_i \rangle = \frac{N}{M} \delta_{\ell j} + \frac{N(N-1)}{M^2} - \left(\frac{N}{M}\right)^2$$

$$= \frac{N}{M} \delta_{\ell j} - \frac{N}{M^2}$$

$\Rightarrow$ Für $i \neq j$ gilt $\langle (\hat{n}_j - \langle \hat{n}_j \rangle)(\hat{n}_i - \langle \hat{n}_i \rangle) \rangle = -\frac{N}{M^2} \xrightarrow{M \to \infty} 0$

Der Grund für die negative Korrelation für <u>feste</u> Teilchenzahl und endliches Gitters ist:
Wenn am Platz $j$ mehr Teilchen als im Mittel sind, müssen sie an den anderen Gitterplätzen fehlen.

3.) <u>Literatur-Recherche</u>


a.). "Cold bosonic atoms in optical lattices", Jaksch et al., Physical Review Letters 81, 3108 (1998)

- http://greiner.physics.havard.edu/

b.) Greiner et al. "collapse and revival of the matter field of a Bose-Einstein condensate"
Nature 419, 51 (2002)

c.). Mewes et al., "Output Coupler for Bose-Einstein condensed atoms"
Physical Review Letters 78, 582 (1997)

- http://cua.mit.edu/ketterle_group/Projects_1997/atomlaser_97/atomlaser_comm.html

) Matthews et al., "Vortices in a Bose-Einstein Condensate"
Physical Review Letters 83, 2498 (1999)

http://cua.mit.edu/ketterle_group/projects_2001/vortex_lattice/vortex.htm

(e) Folman et al., "Controlling Cold atoms using Nanofabricated Surfaces: Atom Chips"
Physical Review Letters 84, 4749 (2000)

http://www.atomchip.org