Theorie 3: Vielteilchenphänomene

SS 2011, Studienziel Bachelor, TP-MAT 3

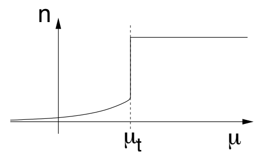
Dozent: F. Marquardt   Übungen: B. Kubala

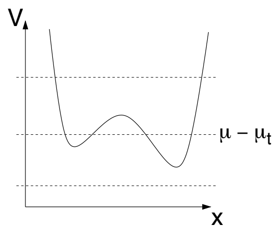
Übungsblatt 4   Abgabe: 07.06. 2011

Präsenzaufgaben

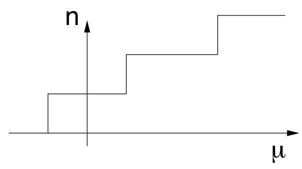
Aufgabe 8 : Chemisches Potential

Das chemische Potential ist sehr nützlich zur Behandlung inhomogener Probleme, die mit seiner Hilfe auf das homogene Problem zurückgeführt werden können.
a) Für ein homogenes Problem sei der Zusammenhang von Dichte, Temperatur und chemischem Potential, $n = n_{\mathrm{hom}}(\mu, T)$ bekannt (siehe Skizze).
Skizzieren Sie die Dichteverteilung im skizzierten inhomogenen Potential für die angegebenen verschiedenen Werte des chemischen Potential.





b) Für einen sogenannten Mott-Isolator Zustand findet man die gezeigte stufenförmige Abhängigkeit der Dichte vom chemischen Potential. Skizzieren Sie die Dichteverteilung in einem harmonischen Potential für verschiedene Werte des chemischen Potential. Solche Dichteverteilungen wurden in Experimenten mit kalten Atomen beobachtet.

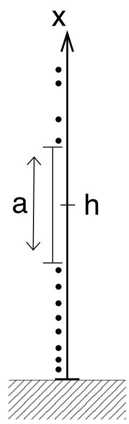


Aufgabe 9 : Adsorption an Oberflächen

Die Atome eines Gases in einem Behälter können an den Wänden des Behälters gebunden werden. Die Behälteroberfläche habe dabei insgesamt M Plätze, an denen maximal ein Atom gebunden werden kann. Die Bindungsenergie für ein Atom sei $-u < 0$.
a) Man betrachte die an der Oberfläche adsorbierten Atome als ein System, das an ein Reservoir (das System der Gasatome) mit Teilchenaustausch gekoppelt ist. Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme $Z(T, \mu)$ für das System der adsorbierten Atome. Zeigen Sie dabei explizit, dass die Zustandssumme faktorisiert in Zustandssummen für die einzelnen Plätze der Oberfläche.
b) Berechnen und skizzieren Sie die mittlere Zahl $\langle N \rangle$ der adsorbierten Atome in Abhängigkeit von Bindungsenergie und chemischem Potential. Unterscheiden sich die chemischen Potentiale für die adsorbierten Atome und für die freien Gasatome?

Hausaufgaben

Hausaufgabe 7: Minimierung der freien Energie *(9 Punkte)*



Wir wollen an einem Beispiel zeigen, dass der Gleichgewichtswert eines makroskopischen Parameters eines Systems gefunden wird, indem man die freie Energie bezüglich des Parameters minimiert.
Dazu betrachten wir einen Ballon der Masse M, der in einem Gas nichtwechselwirkender Teilchen der Masse m schwebt, auf die das Schwerefeld $V(x) = mgx$ wirkt. Der Ballon habe eine Ausdehnung a, d.h. befindet sich die Mitte des Ballons in einer Höhe h wird dies durch ein Intervall $[h - \frac{a}{2}, h + \frac{a}{2}]$ in x-Richtung beschrieben, in dem sich keine Gasteilchen befinden können.

a) Finden Sie die Gleichgewichtsposition h_0 eines kleinen Ballons zunächst durch elementare Überlegungen zum Gleichgewicht zwischen Auftriebs- und Gewichtskraft.

b) Die Zustandssumme der N Gasteilchen für eine vorgegebene Höhe h des Ballons ist durch

$$e^{-\beta F(h)} = Z_h = \frac{1}{N!} \int \frac{dx_1 dx_2 \ldots dx_N}{\lambda_{\text{th}}^N} e^{-\beta(V(x_1,x_2,\ldots,x_N;\, h)+U(h))}$$

gegeben, wobei $x_1,\, x_2, \ldots,\, x_N$ die Position der N Gasatome bezeichnet.
Geben Sie $U(h)$ und $V(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_N;\; h)$ an.
Gasteilchen können sich nicht im Bereich des Ballons aufhalten, d.h. im Intervall $[h - \frac{a}{2}, h + \frac{a}{2}]$ wird $V = \infty$. Über welchen Bereich erstrecken sich dadurch effektiv die auftretenden Integrale?
c) Werten Sie die Zustandssumme aus. Es ist dafür sinnvoll den Parameter $\lambda = (\beta m g)^{-1}$ einzuführen, der die charakteristische Skala des Dichteabfalls des Gases im Schwerefeld angibt. Nehmen Sie im Folgenden $\lambda \gg a$ an.
d) Skizzieren Sie $F(h)$ in Abhängigkeit der Position h des Ballons. Finden Sie die Gleichgewichtsposition h_0 des Ballons durch Minimierung von F.