Lösung Blatt 5 - Hausaufgaben

November 25, 2011

Aufgabe 3 Nicht-resonante Kopplung

Wir betrachten zwei gekoppelte harmonische Oszillatoren

$$\hat{H} = \hbar\omega_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hbar\omega_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 - \hbar g(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1), \tag{1}$$

mit stark unterschiedlichen Frequenzen $\omega_1 - \omega_2 \gg |g|$. Wir sind interessiert an der Zeitentwicklung der **Besetzungszahl von Oszillator** 1, $\langle \hat{a}_1^\dagger(t)\hat{a}_1(t)\rangle$, wobei zum Zeitpunkt $t = 0$ alle Energie in Oszillator 2 ist: $\langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2\rangle = n_0$ und $\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1\rangle = 0$. Ferner ist $\langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1\rangle = 0$ bei $t = 0$. Diese soll in führender Ordnung in $|g|/\delta\omega$ ($\delta\omega \equiv \omega_1 - \omega_2$) berechnet werden.

Hierzu suchen wir zunächst die Eigenmoden des Systems. Wir können den Hamiltonoperator durch den Einteilchenoperator $\mathcal{H}$ ausdrücken $\hat{H} = \sum_{i,j=1,2} \hat{a}_i^\dagger \tilde{H}_{ij} \hat{a}_j$ wobei

$$\tilde{H} = \hbar \begin{pmatrix} \omega_1 & -g \\ -g & \omega_2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Diagonalisierung führt auf die Eigenenergien

$$\frac{\Omega_{1,2}}{\hbar} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \pm \frac{\delta\omega}{2}\sqrt{1 + \frac{4g^2}{\delta\omega^2}}. \tag{3}$$

In führender Ordnung in $g/\delta\omega$ (dies ist $\mathcal{O}(g^2/\delta\omega^2)$) erhalten wir $\Omega_1/\hbar = \omega_1 + g^2/\delta\omega$ und $\Omega_2/\hbar = \omega_2 - g^2/\delta\omega$ (Levelabstoßung). Die dazugehörigen **Eigenmoden** lauten in dieser Ordnung (mit der Normierung $\mathcal{N} = \sqrt{1 + g^2/\delta\omega^2}$)

$$\hat{b}_1 = \frac{\hat{a}_1 - \delta \hat{a}_2}{\mathcal{N}}, \tag{4}$$

$$\hat{b}_2 = \frac{\hat{a}_2 + \delta \hat{a}_1}{\mathcal{N}}. \tag{5}$$

Für $\delta \equiv g/\delta\omega \to 0$ erhalten wir die ungestörten Moden, d.h., $\hat{b}_j \to \hat{a}_j$. Um schliesslich die **Zeitevolu-**

tion zu berechnen, müssen wir diesen Ausdruck invertieren. Wir finden

$$\begin{aligned}
\hat{a}_1 &= \frac{\mathcal{N}}{\underbrace{1+\delta^2}_{1/\mathcal{N}}}(\hat{b}_1 + \delta\hat{b}_2) \\
\hat{a}_2 &= \frac{\hat{b}_2 - \delta\hat{b}_1}{\mathcal{N}}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Schließlich folgt damit

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}^2\langle\hat{a}_1^\dagger(t)\hat{a}_1(t)\rangle &= \left\langle \hat{b}_1^\dagger(0)\hat{b}_1(0) + \delta^2\hat{b}_2^\dagger(0)\hat{b}_2(0) + \delta e^{i(\Omega_1-\Omega_2)t/\hbar}\hat{b}_1^\dagger(0)\hat{b}_2(0) + \text{h.c.}\right\rangle \\
&= \frac{2\delta^2 n_0}{\mathcal{N}^2} + \left[\delta e^{i(\Omega_1-\Omega_2)t/\hbar}\left\langle\hat{b}_1^\dagger(0)\hat{b}_2(0)\right\rangle + \text{c.c.}\right] \\
&= \frac{2\delta^2 n_0}{\mathcal{N}^2} - \frac{2\delta^2 n_0}{\mathcal{N}^2}\cos\left[\frac{(\Omega_1-\Omega_2)}{\hbar}t\right] \\
&= \frac{4\delta^2 n_0}{\mathcal{N}^2}\sin^2\left[\frac{\Omega_1-\Omega_2}{2\hbar}t\right].
\end{aligned} \tag{7}$$

und somit das Endergebnis in $\mathcal{O}(\delta^2)$

$$\langle\hat{a}_1^\dagger(t)\hat{a}_1(t)\rangle \simeq \frac{4g^2 n_0}{(\omega_1-\omega_2)^2}\sin^2\left[\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2} + \frac{g^2}{\omega_1-\omega_2}\right)t\right]. \tag{8}$$

Die Besetzungszahl des schnellen Oszillators 1 oszilliert mit der **Periode**

$$T = \frac{2\pi\delta\omega}{\delta\omega^2 + 2g^2} \tag{9}$$

und erreicht den **Maximalwert** $4g^2 n_0/\delta\omega^2$.

Aufgabe 4 Drei Oszillatoren

Wir betrachten nun drei Oszillatoren mit

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \hbar\omega\sum_{j=1}^{3}\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j - \hbar g\sum_{j=1,2}(\hat{a}_{j+1}^\dagger\hat{a}_j + \text{H.c.}) \\
&= \sum_{i,j=1}^{3}\hat{a}_i^\dagger\tilde{H}_{ij}\hat{a}_j,
\end{aligned} \tag{10}$$

wobei wir den Einteilchenoperator

$$\tilde{H} \quad = \quad \hbar \begin{bmatrix} \omega & -g & 0 \\ -g & \omega & -g \\ 0 & -g & \omega \end{bmatrix} \tag{11}$$

einführen. Der Hamiltonoperator ist diagonal in entsprechenden Normalmoden $\hat{b}_j$ ($j = 1, 2, 3$), so dass $\hat{H} = \sum_{j=1}^{3} \Omega_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j$. Eine der Normalmoden ist in der Tat gegeben durch

$$\hat{b}_1 = \frac{\hat{a}_1 - \hat{a}_3}{\sqrt{2}} \tag{12}$$

und Frequenz $\Omega_1 = \omega$. Diese Mode entspricht der Situation, in der lediglich der linke ($j = 1$) und der rechte Oszillator ($j = 3$) schwingen (mit entgegengesetzter Phase). Der mittlere Oszillator ($j = 2$) ist hierbei statisch.

Die anderen beiden Eigenvektoren $(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i)^T$ (wobei die α_j^i's die Komponenten des i-ten Eigenvektors bezeichnen) findet man leicht, indem man die Orthogonalität der Eigenvektoren verwendet

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^i \\ \alpha_2^i \\ \alpha_3^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \qquad i = 2, 3. \tag{13}$$

Mit $\alpha_1^i = \beta^i$ und $\alpha_2^i = \alpha$ sind also die beiden restlichen Eigenvektoren gegeben durch $\propto (\beta^i, \alpha^i, \beta^i)^T$. Mit diesem Ansatz (direktes Einsetzen) erhält man leicht, dass

$$\begin{aligned} \hat{b}_2 &= \frac{\hat{a}_1 + \sqrt{2}\hat{a}_2 + \hat{a}_3}{2} \qquad \Omega_2 = \omega - \sqrt{2}g \\ \hat{b}_3 &= \frac{\hat{a}_1 - \sqrt{2}\hat{a}_2 + \hat{a}_3}{2} \qquad \Omega_3 = \omega + \sqrt{2}g. \end{aligned} \tag{14}$$