Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik II

Blatt 10 - Präsenzübungen

Wintersemester 2011/12, Universität Erlangen, Prof. Florian Marquardt

Aufgabe 1: Hartree-Näherung

Sei $\bar{V}_j = V_j + U\bar{n}_j \approx \frac{k}{2}x^2 + U\bar{n}_j$ das effektive Potential. Damit $\bar{V}_j$ im Bereich $|x| < a$ exakt flach ist, müsste die Dichte für $|x| < a$ die Form einer umgedrehten Parabel haben $\bar{n}_j = \bar{n}_j^{(0)} - \frac{k}{2U}x^2$ und im Bereich $|x| > a$ verschwinden.

Im Bereich $|x| < a$ würde das Teilchen dann der Schrödingergleichung eines freien Teilchens gehorchen, für $|x| > a$ müsste die Wellenfunktion verschwinden. Die Lösung für dieses Problem kennen wir aber bereits, es ist das "Teilchen im Kasten" mit einer Grundzustandswellenfunktion $\Psi_0(x) = \cos(\kappa x)$ mit $\kappa = \pi/2a$ und $\Psi_0(x = \pm a) = 0$. Dadurch haben wir nun einen Widerspruch zur Annahme: Im Bereich $|x| < a$ weicht die angenommene parabelförmige Dichte deutlich von $|\Psi_0(x)|^2 = \cos^2(\kappa x)$ ab. Besonders auffällig ist dies nahe der Ränder $x = \pm a$, wo $|\Psi_0(x)|^2$ deutlich langsamer ansteigt. Einen solchen flacheren Anstieg fordern wir nun auch für $\bar{n}_j$ in unserem Problem mit dem effektiven Potential. Dadurch kommen die kleinen Vertiefungen rechts und links zustande.

Einen weiteren Unterschied gibt es zum Problem des Teilchens im Kasten. Das effektive Potential ist für $|x| > a$ endlich. Daher hat die Wellenfunktion einen kleinen endlichen Beitrag außerhalb der Parabel, d.h. für $|x| > a$.

Aufgabe 2: Wirbelbewegung

Für eine ebene Welle ergibt sich einen Teilchenstromdichte

$$\vec{j}(\vec{r}) = N|\Psi(\vec{r})|^2\hbar\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})/m = N|\Psi(\vec{r})|^2\hbar\vec{k}/m = N|\Psi(\vec{r})|^2\vec{v}$$

also *Teilchenzahl · Dichte · Geschwindigkeit.*

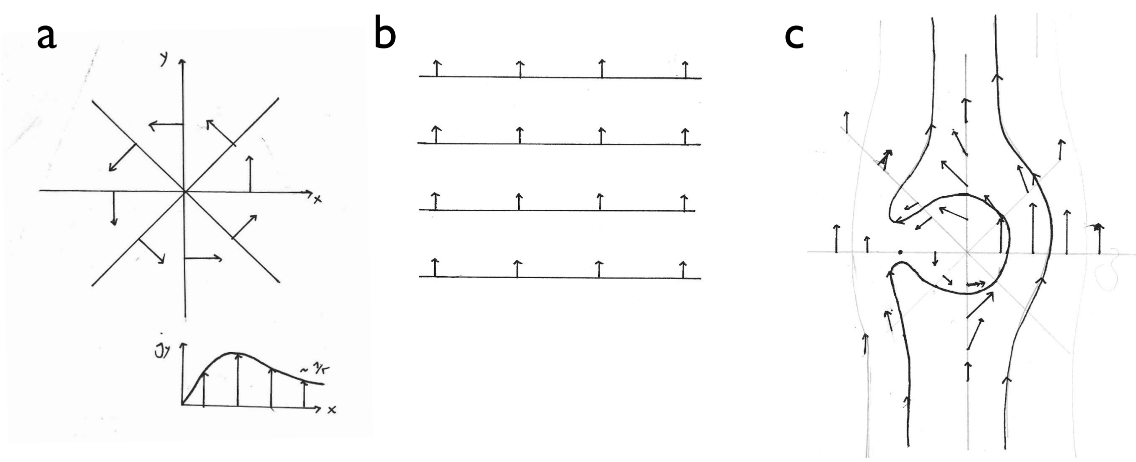

Figure 1: Stromdichte für (a) einen Wirbel (b) eine ebene Welle (in y-Richtung) (c) die Überlagerung von Wirbel und Welle.

Für den Wirbel erhält man einen Strom, der um die Singularität rotiert, siehe Fig. 1(a). Der Strom klingt mit wachsendem Abstand vom Zentrum mit $1/|\vec{r}|$ ab. (Beachten Sie, dass $\vec{\nabla} = \frac{1}{|\vec{r}|}\vec{e}_\varphi \partial_\varphi + ...$ gilt.) Für kleine $|\vec{r}|$ ist das Verhalten durch das Abklingen von $|\Psi(\vec{r})|$ zur Singularität hin bestimmt. Im einfachsten Fall ist $|\Psi(\vec{r})|^2 \sim |\vec{r}|^2$ und damit $|\vec{j}(\vec{r})| \sim |\vec{r}|$ für kleine $|\vec{r}|$. Siehe auch die Skizze in Fig. 1(a).

Überlagert man den Wirbel nun mit einem konstanten Strom (siehe Fig. 1(b)) so ergibt sich ein Strom wie in Fig. 1(c) skizziert. Für große Abstände vom Wirbel dominiert der konstante Strom in y-Richtung. In der Umgebung des Wirbels verstärken sich die Anteile aus konstantem Strom und Wirbel (rechts) oder schwächen sich ab und löschen sich sogar aus (links). Zwei Beispieltrajektorien, die links bzw. rechts des Wirbels starten sind in Fig. 1(c) skizziert. Nicht dargestellt ist der Bereich sehr nahe an der Singularität. Da das Wirbelfeld für kleine $|\vec{r}|$ gegen Null geht, gibt es dort noch einen weiteren Bereich, in dem der konstante Strom dominiert.

Für den Fall, dass sich ein Wirbel von links nach rechts bewegt, betrachten wir das Phasenfeld (drittes Bild auf dem Angabenblatt). Man erkennt, dass der Wirbel bewirkt, dass rechts von ihm ein zusätzlicher "Streifen" mit einer Phasenrotation (von 0 bis 2π) entstanden ist. Wenn der Wirbel nun von links nach rechts wandert, verschwindet dieser "Streifen" und der Strom der durch die Bildfläche fließt (von unten nach oben) nimmt ab. Läuft ein Wirbel dagegen von rechts nach links (oder von links nach rechts, aber mit umgekehrter Drehrichtung) so erhöht sich der Gesamtstrom. [Bemerkung: Superfluide Ströme können abklingen, indem sog. Abrikosov-Wirbel entstehen und sich durch den Strom bewegen.]