Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik II

Wintersemester 2013/14, Universität Erlangen-Nürnberg, Dozent: Prof. Florian Marquardt

Blatt 12 - Abgabetermin: Mittwoch, 22.01.2014, in der Vorlesung

Exercises for the course Quantum Mechanics II

Winter term 2013/14, Universität Erlangen-Nürnberg, Prof. Florian Marquardt

Sheet 12 - Deadline: Wednesday, 22.01.2014, during the lecture

Präsenzübungen (Exercises during the tutorial)

Allgemeiner Hinweis: Fertigen Sie so oft wie möglich saubere Skizzen an, in denen auch wesentliche Längen, Frequenzen, Periodizitäten etc. vermerkt sind. Überlegen Sie sich selbst weitergehende Fragestellungen.

General hint: Whenever possible, always make clear sketches that include essential length and frequency scales, periodicities etc. Also think about other possible questions.

1. Streuung am Hindernis

Betrachten wir ein Potential der Form (in 2D)

$$V(\vec{r}) = V_0 \left\{\delta(x-a) + \delta(x+a)\right\} \left\{\delta(y-a) + \delta(y+a)\right\}$$

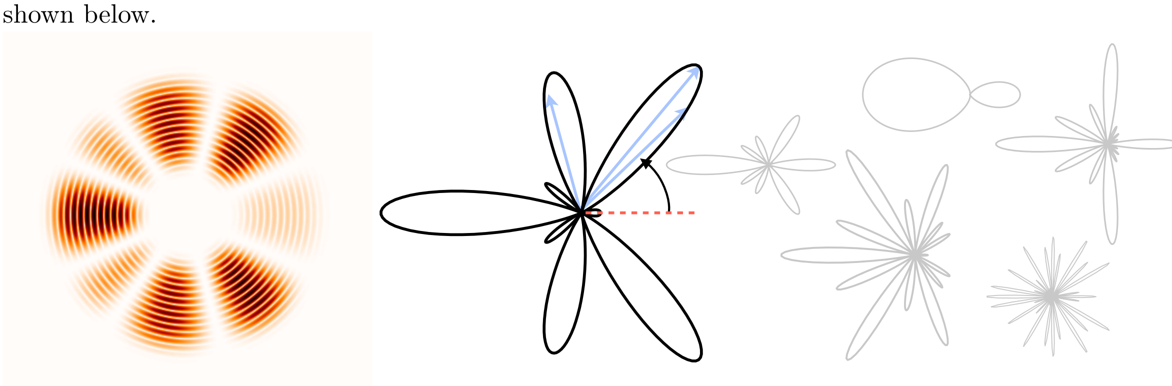
Skizzieren Sie das Potential. Geben Sie die Streurate $\Gamma_{\vec{k}_f \leftarrow \vec{k}_i}$ an. Skizzieren Sie das Quadrat des entsprechenden Matrixelementes in der Ebene des "Impulsübertrags" $\vec{q} = \vec{k}_f - \vec{k}_i$. Skizzieren Sie weiterhin, zu gegebenem $\vec{k}_i = (k, 0)$, die Streurate als Funktion des Streuwinkels, und zwar für $k \ll 1/a$, $k = 0.6 \cdot \pi/(2a)$, $k = \pi/(2a)$ und einen Wert $k \gg 1/a$. Überlegen Sie sich dafür genau, auf welcher Kurve die durch Energieerhaltung erlaubten Impulsüberträge $\vec{q}$ liegen. Zur Auftragung der Winkelabhängigkeit könnten Sie ein Diagramm wie unten gezeigt verwenden.

1. Scattering at a potential barrier

We consider a potential in the form (in 2D)

$$V(\vec{r}) = V_0 \left\{\delta(x-a) + \delta(x+a)\right\} \left\{\delta(y-a) + \delta(y+a)\right\}.$$

Sketch the potential. Give the scattering rate $\Gamma_{\vec{k}_f \leftarrow \vec{k}_i}$. Sketch the square of the corresponding matrix elements in the plane of the "momentum transfer" $\vec{q} = \vec{k}_f - \vec{k}_i$. Moreover, sketch for a fixed $\vec{k}_i = (k, 0)$, the scattering rate as a function of the scattering angle, in particular for $k \ll 1/a$, $k = 0.6 \cdot \pi/(2a)$, $k = \pi/(2a)$ and $k \gg 1/a$. Exactly on which curve does the momentum transfer $\vec{q}$ allowed by energy conservation lie? To represent the dependence on the angle it is possible to use a diagram as the one shown below.



Hausaufgabe (Homework)

3. Zerfallsrate für einen Zustand eines harmonischen Oszillators

Es sei ein harmonischer Oszillator in der Form $\hat{V} = -\hat{x}\hat{F}$ an eine fluktuierende Kraft $\hat{F}$ eines Bades gekoppelt. Schreiben Sie die Zerfallsrate $\Gamma_{n-1\leftarrow n}$ für den Übergang $n \to n-1$ hin (für ein allgemeines Badspektrum), mit Hilfe der allgemeinen Formel aus der Vorlesung. Zeigen Sie, dass die n-Abhängigkeit dieser Rate kompatibel ist mit dem, was die Lindblad-Gleichung voraussagt (Aufgabe 2). Zeigen Sie auch, dass es nur diese Art von Übergang gibt, d.h. $n \to n'$ mit $n' \neq n-1$ ist verboten.

3. Decay rate for a state of a harmonic oscillator

Consider a harmonic oscillator coupled to a fluctuating force $\hat{F}$ of a thermal bath described by the term $\hat{V} = -\hat{x}\hat{F}$. Write down the rate $\Gamma_{n-1\leftarrow n}$ for the transition $n \to n-1$ (for a general spectral density of the bath), by means of the general formula from the lecture. Show that the dependence on n of this rate is compatible with the prediction of the Lindblad Master equation (exercise 2). Show also that only this kind of transition is permitted, that is $n \to n'$ with $n' \neq n-1$ ist forbidden.

4. Spektrum einer linearen Kette

Wir wollen das Spektrum der Fluktuationen der Auslenkung $\hat{x}_j(t)$ eines Oszillators in einer Kette berechnen. Wir haben, nach der Diagonalisierung des Hamiltonoperators, wie üblich: $\hat{H} = \sum_k \hbar\omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k$, $\hat{x}_j = x_{\mathrm{ZPF}}(\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger)$ und $\hat{a}_j = \sum_k \frac{e^{ikj}}{\sqrt{N}}\hat{b}_k$ (in "rotating wave approximation"). Geben Sie ganz allgemein (d.h. für beliebige ω_k) das Spektrum $S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \langle \hat{x}_j(t)\hat{x}_j(0)\rangle$ an. Es sei dabei vorausgesetzt, dass das System im Grundzustand ist. *Können Sie skizzieren wie das Spektrum im thermodynamischen Limes $N \to \infty$ aussieht, wenn $\omega_k = \Omega - 2J\cos(k)$ und $k = l2\pi/N \in [-\pi, \pi[$? Was würde das bedeuten für die Zerfallsrate eines Systems, welches eine Kraft proportional zu $\hat{x}_j$ verspürt, in Abhängigkeit seiner Übergangsfrequenz?

4. Spectrum of a linear chain

We want to compute the noise spectrum of the displacement $\hat{x}_j(t)$ of an oscillator in a chain. As usual, after the diagonalization of the Hamiltonian, we find: $\hat{H} = \sum_k \hbar\omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k$, $\hat{x}_j = x_{\mathrm{ZPF}}(\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger)$ and $\hat{a}_j = \sum_k \frac{e^{ikj}}{\sqrt{N}}\hat{b}_k$ (in the rotating wave approximation). Compute the general (that is for arbitrary ω_k) spectrum $S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \langle \hat{x}_j(t)\hat{x}_j(0)\rangle$. Assume that the system is in the groundstate. *Can you sketch the spectrum in the thermodynamic limits $N \to \infty$ when $\omega_k = \Omega - 2J\cos(k)$ and $k = l2\pi/N \in [-\pi, \pi[$? What would imply for the decay rate as a function of the transition frequency in a system which is subject to a force proportional to $\hat{x}_j$?

***-Aufgabe: Weisskopf-Wigner Modell für Dissipation in der Quantenmechanik**

Gegeben ist ein Niveau $|i\rangle$ (Energie E) und viele weitere Niveaus $|k\rangle$ (Energie E_k), an welche das erste Niveau mit den Matrixelementen $\left\langle k \left| \hat{H} \right| i \right\rangle = \left\langle i \left| \hat{H} \right| k \right\rangle^* = g_k$ koppelt. Schreiben Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung in dieser Basis hin. Leiten Sie eine allgemeine Lösung für $\langle i|\Psi(t)\rangle = \psi_i$ her, indem Sie die Gleichungen für die anderen Amplituden ψ_k formal lösen und dadurch die ψ_k in der ψ_i-Gleichung eliminieren. Hinweis: Die beste Methode verwendet Laplace-Transformation.

***-Exercise: Weisskopf-Wigner Modell for dissipation in Quantum mechanics**

Consider a level $|i\rangle$ (with energy E) and many other levels $|k\rangle$ (with energy E_k), their coupling to the first level is described by the Hamiltonian matrix element $\left\langle k \left| \hat{H} \right| i \right\rangle = \left\langle i \left| \hat{H} \right| k \right\rangle^* = g_k$. Write down the time-dependent Schrödinger equation in this basis. Derive the general solution for $\langle i|\Psi(t)\rangle = \psi_i$, by formally solving the equations for the other amplitudes ψ_k and using the solution to eliminate the ψ_k in the equation for ψ_i. Tip: it is most convenient to use the Laplace transformation.