

Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik II

Blatt 10 - Hausaufgaben

Wintersemester 2011/12, Universität Erlangen, Prof. Florian Marquardt

Aufgabe 3: Mehr Wirbel

Für ein Paar aus Wirbel und Antiwirbel verstärkt sich der Strom zwischen den beiden Wirbelzentren. Im Fernfeld neutralisieren sich allerdings die Beiträge, siehe Fig. 1(a). (Dies sieht man auch, wenn man die zugehörigen Phasenfelder addiert.) Für zwei Wirbel hingegen löschen sich die Beiträge zum Strom zwischen den beiden Wirbelzentren aus, während sie sich im Fernfeld addieren. Im Grenzfall von verschwindendem Abstand zwischen den Wirbelzentren löschen sich Wirbel und Antiwirbel aus, während die zwei Wirbel zu einem Gesamtwirbel mit zweifachem Strom fusionieren.

Der Beitrag aus der kinetischen Energie $E_{\text{kin}} \propto \int |\Psi|^2 (\vec{\nabla}\varphi)^2 d^2\vec{r}$ soll nun abgeschätzt werden, indem wir von einer unteren Schwelle r_c bis zum Abstand R integrieren (also das Verhalten nahe der Singularitäten nicht betrachten) und benutzen, dass $\vec{\nabla}\varphi \sim 1/r$, $r = |\vec{r}|$:

$$\int_{r_c}^R |\Psi|^2 (\vec{\nabla}\varphi)^2 d^2\vec{r} \sim \int_{r_c}^R \frac{1}{r^2} 2\pi r dr \sim \ln \frac{R}{r_c}.$$

Für das Wirbel-Antiwirbel-Paar haben wir festgestellt, dass $\vec{\nabla}\varphi$ nur einen Beitrag zwischen den beiden Wirbelzentren (mit Abstand d) hat. Das Integral ergibt also einen Beitrag $\sim \ln \frac{d}{r_c}$. Für $d \rightarrow 0$ löschen sich die beiden Wirbel aus, also $E_{\text{kin}} \rightarrow 0$, siehe Skizze in Fig. 1(a). [Beim Kosterlitz-Thouless-Phasenübergang bilden solche Wirbel-Antiwirbel-Paare unterhalb einer kritischen Temperatur einen stabilen gebundenen Zustand der eine geordnete superfluide Phase ermöglicht.]

Für das Wirbel-Wirbel-Paar ist im Grenzfall $d \rightarrow 0$ die kinetische Energie vervierfacht im Vergleich zu einem einzelnen Wirbel: Der Strom ist verdoppelt und geht quadratisch in E_{kin} ein. Für den Grenzfall $d \rightarrow \infty$ addieren sich die Energien der Wirbel lediglich, siehe Figur 2(b).

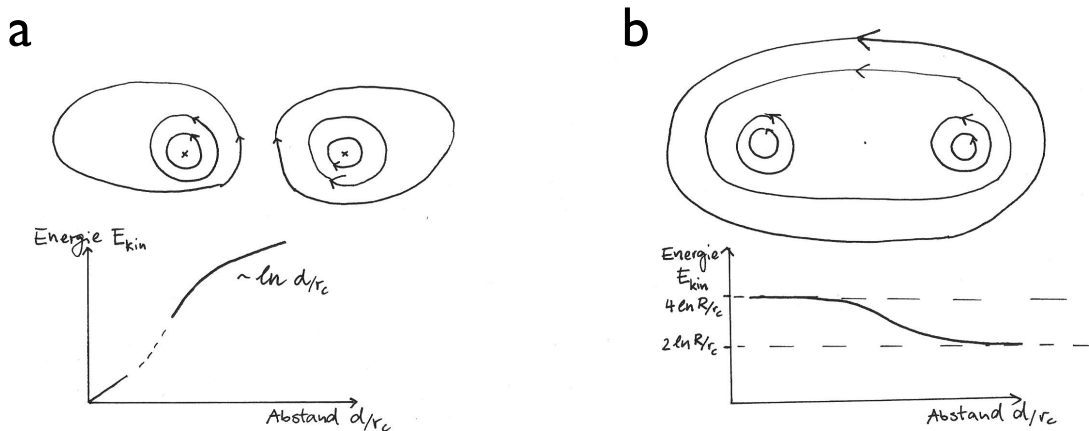


Figure 1: Stromdichte für ein (a) Wirbel-Antiwirbel-Paar und ein (b) Wirbel-Wirbel-Paar, sowie die zugehörigen kinetischen Energien der Wirbelpaare.