Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik II

Wintersemester 2013/14, Universität Erlangen-Nürnberg, Dozent: Prof. Florian Marquardt

Blatt 9 - Abgabetermin: Mittwoch, 18.12.2013, in der Vorlesung

Exercises for the course Quantum Mechanics II

Winter term 2013/14, Universität Erlangen-Nürnberg, Prof. Florian Marquardt

Sheet 9 - Deadline: Wednesday, 18.12.2013, during the lecture

Präsenzübungen (Exercises during the tutorial)

Allgemeiner Hinweis: Fertigen Sie so oft wie möglich saubere Skizzen an, in denen auch wesentliche Längen, Frequenzen, Periodizitäten etc. vermerkt sind. Überlegen Sie sich selbst weitergehende Fragestellungen.

General hint: Whenever possible, always make clear sketches that include essential length and frequency scales, periodicities etc. Also think about other possible questions.

1. Gutzwiller-Ansatz für den Mott-Isolator / Superfluid Übergang

Für das "Bose-Hubbard-Modell"

$$\hat{H} = -J \sum_i \sum_{j=NN(i)} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i + \frac{U}{2} \sum_j \hat{n}_j (\hat{n}_j - 1)\,,$$

kann nach einer Idee von Gutzwiller folgende Variationswellenfunktion angesetzt werden:

$$|\Psi\rangle = \Pi_j \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\hat{a}_j^\dagger \right)^n \right\} |0\rangle$$

Dabei sind die f_n noch unbestimmte Konstanten, für welche aber die Normierung gelte: $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^2 = 1$.

(1.) Zeigen Sie für $i \neq j$:

$$\left\langle \Psi \middle| \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i \middle| \Psi \right\rangle = |\alpha|^2$$

mit $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^* \sqrt{n+1} f_{n+1}$. Zeigen Sie weiterhin:

$$\left\langle \Psi \left| \hat{n}_j^2 \right| \Psi \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 |f_n|^2$$

(2.) Berechnen Sie das großkanonische Potential

$$\left\langle \Psi \middle| \hat{H} \middle| \Psi \right\rangle - \mu \left\langle \Psi \middle| \hat{N} \middle| \Psi \right\rangle$$

(3.) Starten Sie nun vom Ansatz eines Mott-Isolators mit der fixen Teilchenzahl $n = m$. Fragen Sie, ab wann (bei welchem μ) dieser Zustand instabil wird. Setzen Sie also (mit reellen δ_+, $\delta_- \ll 1$):

$$f_{m-1} = \delta_-,\; f_m \approx 1 - \frac{\delta_+^2 + \delta_-^2}{2},\; f_{m+1} = \delta_+,$$

und alle anderen $f_n = 0$ (überzeugen Sie sich davon, dass die Normierung hier bis zu quadratischer Ordnung in $\delta_\pm$ erfüllt ist). Entwickeln Sie das in (2) erhaltene Potential in quadratischer Ordnung in $\delta_\pm$. Für welchen Parameterbereich in μ und J/U ist der gegebene Mott-Isolator stabil? Skizzieren Sie das Resultat in der $(J/U, \mu)$-Ebene.

1. Gutzwiller-Ansatz for the Mott-insulator / superfluid transition

Let us consider the "Bose-Hubbard model"

$$\hat{H} = -J \sum_i \sum_{j=NN(i)} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i + \frac{U}{2} \sum_j \hat{n}_j (\hat{n}_j - 1)\,.$$

According to an idea of Gutzwiller, one can make the variational ansatz

$$|\Psi\rangle = \Pi_j \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\hat{a}_j^\dagger\right)^n \right\} |0\rangle$$

for the wavefunction $|\psi\rangle$. Here, f_n are (unknown) constants, which are normalized according to $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^2 = 1$.

(1.) Show for $i \neq j$:

$$\left\langle \Psi \left| \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i \right| \Psi \right\rangle = |\alpha|^2 \,,$$

where $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^* \sqrt{n+1} f_{n+1}$. Show also that

$$\left\langle \Psi \left| \hat{n}_j^2 \right| \Psi \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 |f_n|^2 \,.$$

(2.) Calculate the grand canonical potential

$$\left\langle \Psi \left| \hat{H} \right| \Psi \right\rangle - \mu \left\langle \Psi \left| \hat{N} \right| \Psi \right\rangle \,.$$

(3.) Consider the Mott-insulator ansatz with a constant number of particles $n = m$. For which μ does the Mott-insulator become instable? Thus, consider

$$f_{m-1} = \delta_-\,,\; f_m \approx 1 - \frac{\delta_+^2 + \delta_-^2}{2},\; f_{m+1} = \delta_+,$$

where δ_+, $\delta_- \ll 1$ (and $\delta_\pm$ real) and $f_n = 0$ else (show that the f_n are normalized up to second order in $\delta_\pm$). Expand the grand canonical potential up to second order in $\delta_\pm$. For which combinations of μ and J/U is the Mott-insulator stable? Sketch the result in the $(J/U, \mu)$-plane.

Hausaufgabe (Homework)

2. Dichte-Korrelationen im BEC

Betrachten Sie ein Bose-Einstein-Kondensat auf dem Gitter (ohne Wechselwirkung),

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left(\hat{b}_{k=0}^{+}\right)^N |0\rangle$$

Berechnen Sie:

$$\mathrm{Var}\hat{n}_j = \left\langle \hat{n}_j^2 \right\rangle - \left\langle \hat{n}_j \right\rangle^2$$

Zeigen Sie, dass sich hierfür (in sehr guter Näherung) das Resultat ergibt, welches man für einen kohärenten Zustand erwarten würde.

Berechnen Sie ferner:

$$\langle \hat{n}_j \hat{n}_i \rangle$$

für $i \neq j$. Zeigen Sie, dass die Fluktuationen der Teilchenzahl an verschiedenen Plätzen unkorreliert sind, dass also gilt: $\langle (\hat{n}_j - \langle \hat{n}_j \rangle)(\hat{n}_i - \langle \hat{n}_i \rangle) \rangle = 0$. Das bedeutet: Es gibt keine fluktuierenden Häufungen von Bosonen an einzelnen Plätzen im BEC, die Teilchen sind statistisch unabhängig über das Gitter verteilt!

2. Density-correlations in a BEC

Consider a Bose-Einstein condensate on a lattice (without interactions)

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left(\hat{b}^+_{k=0} \right)^N |0\rangle \ .$$

Calculate

$$\mathrm{Var}\hat{n}_j = \left\langle \hat{n}_j^2 \right\rangle - \left\langle \hat{n}_j \right\rangle^2 \ .$$

Show that this result can be well approximated by the result one would expect for a coherent state.

Calculate also

$$\langle \hat{n}_j \hat{n}_i \rangle$$

for $i \neq j$. Show that the particle number fluctuations at different sites are uncorrelated, i.e. that $\langle (\hat{n}_j - \langle \hat{n}_j \rangle)(\hat{n}_i - \langle \hat{n}_i \rangle) \rangle = 0$ holds. Thus, fluctuating clusters of bosons do not exist at single lattice sites in a BEC; the particles are distributed statistically independent over the lattice.

3. Literatur-Recherche

Verwenden Sie Werkzeuge wie Web of Science oder Google (bzw. Google Scholar), um Originalartikel und Bilder zu folgenden Aspekten des Hubbard Modells und kalter Quantengase zu finden:

- Um was handelt es sich bei dem "Wedding Cake" Dichteprofil in einem Gas kalter Atome?
- Wie hat man Dekohärenz und Rekohärenz ("collapse and revival") in einem Bose-Hubbard-Modell mit kalten Atomen experimentell beobachtet? In welcher früheren Übungsaufgabe haben wir tatsächlich genau dieses Phänomen berechnet? Wie hängen die Parameter aus der experimentellen Arbeit mit denen aus unserer Aufgabe zusammen?
- Was ist ein "Atom-Laser" ?
- Unter welchen Umständen konnte man Wirbel in einem Bose-Einstein-Kondensat beobachten?
- Was ist ein "Atom-Chip" ?

3. Literature research

Use tools such as "web of science" or "google (or google scholar)" to find original scientific articles and pictures concerning the following aspects of the Hubbard model and cold quantum gases:

- What is the “wedding cake” density profile of an ultra cold atomic gas about?
- How was the “collapse and revival” observed experimentally in a Bose-Hubbard model using cold atoms? In which previous exercise did we calculate this phenomenon? How are the experimental parameters connected to the parameters of our exercise?
- What is an “atom laser”?
- How was one able to observe vortices in a Bose-Einstein condensate?
- What is an “atom chip”?