Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik II

Blatt 4 - Hausaufgaben

Wintersemester 2011/12, Universität Erlangen, Prof. Florian Marquardt

Aufgabe 4: Nochmal gequetschte Zustände

(a) Es gilt

$$\hat{S}(z)^\dagger = \exp\Big(\frac{1}{2}\{z(\hat{a}^\dagger)^2 - z^*\hat{a}^2\}\Big) = \exp\Big(-\frac{1}{2}\{z^*\hat{a}^2 - z(\hat{a}^\dagger)^2\}\Big) \tag{1}$$

und damit $\hat{S}(z)^\dagger\hat{S}(z) = \mathbf{1}$.

(b) Die Verknüpfung von μ und δK ist so gewählt, dass

$$\hbar\mu(\hat{a}^\dagger + \hat{a})^2 = \frac{\hbar\mu}{x_{\mathrm{ZPF}}^2}\hat{x}^2 = \frac{\delta K}{2}\hat{x}^2 \tag{2}$$

Die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen liefern

$$\frac{d}{dt}\hat{a}(t) = \quad -\tfrac{i}{\hbar}[\hat{a}(t), H] = \quad -i\omega\hat{a}(t) - i2\mu\big(\hat{a}^\dagger(t) + \hat{a}(t)\big) \tag{3}$$

Der Term $\propto \mu$ bewirkt, dass die Frequenz auf $\omega + 2\mu$ angehoben wird und führt dazu, dass die Bewegungsgleichungen für Erzeuger und Vernichter gekoppelt sind.

Aufgabe 5: Gekoppelte harmonische Oszillatoren: Heisenbergbild

Aus den Heisenbergschen Bewegungsgleichungen erhält man

$$\frac{d}{dt}\hat{a}_1(t) = \quad -\tfrac{i}{\hbar}[\hat{a}_1(t), H] = \quad -i\omega_1\hat{a}_1(t) + ig\big(\hat{a}_2^\dagger(t) + \hat{a}_2(t)\big) \tag{4}$$

und analog für $\hat{a}_1(t) \leftrightarrow \hat{a}_2(t)$.