Theorie 3: Vielteilchenphänomene

Sommersemester 2012
Dozent: F. Marquardt
Blatt 5, Abgabe: 24.5.2012

Präsenzaufgaben

Wärmestrahlung

a) Berechnen Sie die von der Sonne durch Wärmestrahlung ausgesendete Gesamtleistung. Der Sonnenradius beträgt $R_S = 7 \cdot 10^8$m, die Oberflächentemperatur der Sonne 5800K.
b) Die Erde reflektiert 30% der Sonnenstrahlung direkt, der Rest wird absorbiert und als Wärmestrahlung reemittiert. Berechnen Sie die Temperatur der Erde aus dem Gleichgewicht zwischen absorbierter und emittierter Strahlung. Der Abstand der Erde zur Sonne beträgt 8 Lichtminuten.
c) Betrachten Sie das Universum als dreidimensionalen Hohlraum mit Radius 10^{26}m und der gleichmäßigen Temperatur von 3K (Mikrowellenhintergrundstrahlung). Berechnen Sie die Gesamtenergie der Hintergrundstrahlung und schätzen Sie die Gesamtzahl der Photonen in dieser Strahlung ab.

Hausaufgaben

Der Ballon

Wir wollen an einem Beispiel zeigen, dass der Gleichgewichtswert eines makroskopischen Parameters eines Systems gefunden wird, indem man die freie Energie bezüglich des Parameters minimiert. Dazu betrachten wir einen Ballon der Masse M an der Position X, der in einem Gas nichtwechselwirkender Teilchen der Masse m schwebt. Die Schwerebeschleunigung g wirkt sowohl auf den Ballon als auch die Gasteilchen. Der Ballon habe eine Ausdehnung a, d.h. befindet sich die Mitte des Ballons in einer Höhe X, so wird dies durch ein Intervall $[X - \frac{a}{2}, X + \frac{a}{2}]$ in x-Richtung beschrieben, in dem sich keine Gasteilchen befinden können. Die Beschreibung ist hier der Einfachheit halber eindimensional, aber Teilchen sollen sich frei um den Ballon herum bewegen können (es ist also nur die Gesamtzahl aller Teilchen fix, nicht die Zahlen oberhalb und unterhalb des Ballons einzeln).

a) Skizzieren Sie die Situation. Finden Sie die Gleichung für die Gleichgewichtsposition X_0 eines kleinen Ballons zunächst durch elementare Überlegungen zum Gleichgewicht zwischen Auftriebs- und Gewichtskraft, wobei Sie bereits die barometrische Höhenformel für die nach oben abnehmende Gasdichte verwenden sollten.

b) Die Zustandssumme der N Gasteilchen für eine vorgegebene Höhe X des Ballons ist durch

$$e^{-\beta F(X)} = Z_h = \frac{1}{N!} \int \frac{dx_1 dx_2 \ldots dx_N}{\lambda_{\text{th}}^N} e^{-\beta(V(x_1, x_2, \ldots, x_N;\, X) + U(X))}$$

gegeben, wobei $x_1,\, x_2, \ldots,\, x_N$ die Position der N Gasatome bezeichnet. Geben Sie die potentielle Energie $U(X)$ des Ballons im Schwerefeld, sowie die potentielle Energie $V(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_N;\;X)$ aller Gasteilchen an. Hinweis: Gasteilchen können sich nicht im Bereich des Ballons aufhalten, d.h. im Intervall $[X - \frac{a}{2}, X + \frac{a}{2}]$ wird $V = \infty$. Über welchen Bereich erstrecken sich dadurch effektiv die auftretenden Integrale?

c) Werten Sie die Zustandssumme aus, welche in ein Produkt aus N gleichwertigen Integralen zerlegt werden kann. Es ist dafür sinnvoll, zur Abkürzung den Parameter $\lambda = (\beta m g)^{-1}$ einzuführen, der die charakteristische Skala des Dichteabfalls des Gases im Schwerefeld angibt. Nehmen Sie im Folgenden $\lambda \gg a$ an.

d) Skizzieren Sie $F(X)$ in Abhängigkeit der Position X des Ballons. Finden Sie die Gleichgewichtsposition X_0 des Ballons durch Minimierung von F. Überzeugen Sie sich davon, dass dies mit dem elementaren Ergebnis übereinstimmt.

***-Aufgabe (optional) Entropie der Wärmestrahlung**

Die Entropie eines harmonischen Oszillators

$$S^{H.O.} = \frac{\hbar\omega}{T}\langle n \rangle - k_B \ln\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right)$$

wurde in der Vorlesung berechnet. Geben Sie analog zu den Berechnungen in der Vorlesung einen Integralausdruck für die Gesamtentropie eines Wärmestrahlungsfeldes in drei Raumdimensionen an, wobei Sie $D(\omega) \propto \omega^2$ annehmen können.

Das Integral kann (mit partieller Integration) auf das Integral für die Gesamtenergie des Wärmestrahlungsfeldes zurückgeführt werden. Berechnen Sie damit das Verhältnis $S/\delta E$ für die Wärmestrahlung.