Übungen (Probeklausur) zur Vorlesung Quantenmechanik II

Wintersemester 2013/14, Universität Erlangen-Nürnberg, Dozent: Prof. Florian Marquardt

Blatt 11 - Abgabetermin: Mittwoch, 15.01.2014, in der Vorlesung

Exercises (Test Exam) for the course Quantum Mechanics II

Winter term 2013/14, Universität Erlangen-Nürnberg, Prof. Florian Marquardt

Sheet 11 - Deadline: Wednesday, 15.01.2014, during the lecture

Präsenzübungen (Exercises during the tutorial)

Allgemeiner Hinweis: Fertigen Sie so oft wie möglich saubere Skizzen an, in denen auch wesentliche Längen, Frequenzen, Periodizitäten etc. vermerkt sind. Überlegen Sie sich selbst weitergehende Fragestellungen.

General hint: Whenever possible, always make clear sketches that include essential length and frequency scales, periodicities etc. Also think about other possible questions.

1. Gequetschter Zustand

(a) Schreiben Sie den Hamiltonoperator $\hat{H}$ für einen harmonischen Oszillator der Masse m und Frequenz ω hin und leiten Sie daraus die Heisenberg-Bewegungsgleichungen für $\hat{x}(t)$ und $\hat{p}(t)$ her.

(b) Leiten Sie daraus die Gleichung für $d^2\hat{x}(t)/dt^2$ her und lösen Sie diese durch einen Ansatz der Form $\hat{x}(t) = \cos(\omega t)\hat{A} + \sin(\omega t)\hat{B}$. Finden Sie $\hat{A}$ und $\hat{B}$ aus den Anfangswerten $\hat{x}(0)$ und $\hat{p}(0)$.

(c) Drücken Sie damit $\left\langle \hat{x}(t)^2 \right\rangle$ durch die Erwartungswerte bei $t = 0$ aus.

(d) Wenn $\langle \hat{x}(0)\hat{p}(0)\rangle + \langle \hat{p}(0)\hat{x}(0)\rangle = 0$ ist: Skizzieren Sie $\left\langle \hat{x}(t)^2 \right\rangle$ für einen typischen allgemeinen Fall. Unter welcher Bedingung an die Anfangsvarianzen von Ort und Impuls würde $\left\langle \hat{x}(t)^2 \right\rangle$ zeitunabhängig?

(e) Falls $\psi(x, t = 0)$ eine bei $x = 0$ zentrierte Gaußglocke ist: Skizzieren Sie $|\psi(x,t)|^2$ zu einigen späteren Zeitpunkten.

1. Squeezed states

(a) Write down the Hamiltonian $\hat{H}$ for a harmonic oscillator with mass m and frequency ω. Then, derive the Heisenberg equation of motion for $\hat{x}(t)$ and $\hat{p}(t)$.

(b) Derive from these the equation of motion for $d^2\hat{x}(t)/dt^2$. Solve the resulting equation using the ansatz $\hat{x}(t) = \cos(\omega t)\hat{A} + \sin(\omega t)\hat{B}$. Find $\hat{A}$and $\hat{B}$ as a function of $\hat{x}(0)$ and $\hat{p}(0)$.

(c) Using this result, represent $\left\langle \hat{x}(t)^2 \right\rangle$ using the expectation values at time $t = 0$.

(d) Given $\langle \hat{x}(0)\hat{p}(0)\rangle + \langle \hat{p}(0)\hat{x}(0)\rangle = 0$. Plot $\left\langle \hat{x}(t)^2 \right\rangle$ for a typical, general case. Demand $\left\langle \hat{x}(t)^2 \right\rangle$ to be independent of time. What does this mean for the variances of position and momentum at $t = 0$?

(e) Assume that $\psi(x, t = 0)$ is a Gaussian which is centred around $x = 0$. Plot $|\psi(x,t)|^2$ at some later points in time.

2. Fermionen auf dem 1D Gitter

Es sei

$$\hat{H} = \epsilon \sum_{l=1}^{N} \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l - J \sum_{l=1}^{N} \left\{ \hat{a}_{l+1}^\dagger \hat{a}_l + \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_{l+1} \right\}$$

mit periodischen Randbedingungen (also $\hat{a}_{N+1} = \hat{a}_1$) und *fermionischen* Operatoren $\hat{a}_l$.
(a) Zeigen Sie durch direktes Einsetzen:

$$\hat{a}_l = \sum_k \frac{e^{ikl}}{\sqrt{N}} \hat{b}_k$$

diagonalisiert $\hat{H}$. Welche Werte darf k annehmen? Was ist ϵ_k in $\hat{H} = \sum_k \epsilon_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \text{const}$?
(b) Zeigen Sie: $\left\{\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^\dagger\right\} = \delta_{k,k'}$.

2. Fermions on a 1D lattice

Given

$$\hat{H} = \epsilon \sum_{l=1}^{N} \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l - J \sum_{l=1}^{N} \left\{\hat{a}_{l+1}^\dagger \hat{a}_l + \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_{l+1}\right\}$$

with periodic boundary conditions (i.e., $\hat{a}_{N+1} = \hat{a}_1$) and *fermionic* operators $\hat{a}_l$.
(a) Show by means of a direct calculation:

$$\hat{a}_l = \sum_k \frac{e^{ikl}}{\sqrt{N}} \hat{b}_k$$

diagonalizes $\hat{H}$. Which are the allowed values for k? How does ϵ_k in $\hat{H} = \sum_k \epsilon_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \text{const}$ look like?
(b) Show that $\left\{\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^\dagger\right\} = \delta_{k,k'}$.

Hausaufgabe (Homework)

3. Hubbard-Modell mit zwei Plätzen

Wir haben $N = 2$ bosonische Teilchen auf zwei Plätzen, also die Zustände

$$|2,0\rangle\,,\ |1,1\rangle\,,\ |0,2\rangle$$

Es sei

$$\hat{H} = -J(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1) + \frac{U}{2} \sum_{l=1,2} \hat{n}_l(\hat{n}_l - 1)$$

mit $\hat{n}_l = \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l$.

(a) Zeigen Sie: $|\Psi_-\rangle = \{|2,0\rangle - |0,2\rangle\}/\sqrt{2}$ ist ein Energie-Eigenvektor (zu welcher Energie?).

(b) Weshalb müssen dann die beiden anderen Eigenvektoren von der Form

$$|\Psi\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \{|2,0\rangle + |0,2\rangle\} + \beta\,|1,1\rangle$$

sein?

(c) Gehen Sie mit dem Ansatz aus (b) in $\hat{H}\,|\Psi\rangle = E\,|\Psi\rangle$. Schreiben Sie die beiden Gleichungen $\langle 2,0|\,\hat{H}\,|\Psi\rangle = \langle 2,0|\,E\,|\Psi\rangle$ und $\langle 1,1|\,\hat{H}\,|\Psi\rangle = \langle 1,1|\,E\,|\Psi\rangle$ explizit aus. Eliminieren Sie β und finden Sie dann, welche Gleichung für E gelten muss (damit nicht nur $\alpha = \beta = 0$ eine Lösung ist).

(d) Lösen Sie die Gleichung für E und skizzieren Sie alle drei Energie-Eigenwerte von $\hat{H}$ als Funktion von J/U!

3. Hubbard-Model with two sites

Consider $N = 2$ bosonic particles located at two lattices sites, i.e., consider the states

$$|2,0\rangle\,,\ |1,1\rangle\,,\ |0,2\rangle$$

Given

$$\hat{H} = -J(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1) + \frac{U}{2} \sum_{l=1,2} \hat{n}_l(\hat{n}_l - 1)$$

where $\hat{n}_l = \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l$.

(a) Show: $|\Psi_-\rangle = \{|2,0\rangle - |0,2\rangle\}/\sqrt{2}$ is an energy-eigenvector. What is the corresponding energy?

(b) Why are the two remaining eigenvectors of the form

$$|\Psi\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \{|2,0\rangle + |0,2\rangle\} + \beta\,|1,1\rangle\,?$$

(c) Plug the ansatz of (b) into $\hat{H}\,|\Psi\rangle = E\,|\Psi\rangle$. Write down the two equations $\langle 2,0|\,\hat{H}\,|\Psi\rangle = \langle 2,0|\,E\,|\Psi\rangle$ and $\langle 1,1|\,\hat{H}\,|\Psi\rangle = \langle 1,1|\,E\,|\Psi\rangle$ explicitly. Eliminate β and find an equation which has to hold for E (such that not only $\alpha = \beta = 0$ is a solution).

(d) Solve the equation for E and sketch all three energy-eigenvalues of $\hat{H}$ as a function of J/U.

4. Bose-Einstein-Kondensat

In einem optischen Gitter mit den Plätzen $l = 1 \dots N$ befinden sich Atome. Das Gitter wird ausgeschaltet, die Atomwellen beginnen zu expandieren, und in einer gewissen Richtung findet man das Feld

$$\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{N} \hat{a}_l$$

(a) Drücken Sie $\left\langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \right\rangle$ durch die Einteilchendichtematrix $\left\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \right\rangle$ aus.

(b) Was ist $\lim_{N\to\infty} \left\langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \right\rangle / N^s$ für $s = 0$ und $s = 1$, in den beiden Fällen: (i) Die Atome im Gitter formten ein Bose-Einstein-Kondensat; (ii) Es lag vor eine thermische Wolke von Bosonen in dem Gitter bei hohen Temperaturen (also keine Bose-Einstein-Kondensation).

4. Bose-Einstein-Condensate

Given atoms in an optical lattice with sites $l = 1 \dots N$. The lattice is now being switched off such that the atom-waves start to expand. One finds the field

$$\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{N} \hat{a}_l$$

in some direction.

(a) Represent $\left\langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \right\rangle$ using the single-particle density matrix $\left\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \right\rangle$.

(b) How does $\lim_{N\to\infty} \left\langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \right\rangle / N^s$ for $s = 0$ and $s = 1$ look like for the two cases (i) The atoms inside the lattice have formed a Bose-Einstein condensate; (ii) The atoms inside the lattice have formed a thermal cloud of Bosons at high temperatures (i.e., they have not formed a Bose-Einstein condensate).