Theorie 3: Vielteilchenphänomene

SS 2011, Studienziel Bachelor, TP-MAT 3

Dozent: F. Marquardt   Übungen: B. Kubala

Übungsblatt 9   Abgabe: 12.07. 2011

Präsenzaufgaben

Aufgabe 18 : Heisenberg-Spins in Molekularfeldnäherung

Wir betrachten die ferromagnetische Wechselwirkung zwischen klassischen Spins in d Dimensionen. Die Energie sei durch

$$E = -\tilde{J} \sum_{l,\, i = \mathrm{NN}(i)} \vec{S}_l \vec{S}_i = -2J \sum_{\langle l,\, i \rangle} \vec{\sigma}_l \vec{\sigma}_i \quad \text{mit} \qquad J > 0$$

gegeben, wobei $\vec{\sigma}_i$ Vektoren der Länge 1 sind und wir kein äußeres magnetisches Feld anlegen.
a) Betrachten Sie das System in der Molekularfeldnäherung und zeigen Sie, dass die Selbstkonsistenzgleichung für den mittleren Spin $\bar{\vec{\sigma}} =: \bar{\sigma}\vec{e}_z$ durch

$$\bar{\sigma} = L(\beta 4 J d \bar{\sigma})$$

mit der Langevin-Funktion $L(x) = \coth x - \frac{1}{x}$ gegeben ist.
b) Skizzieren Sie, wie man geometrisch die Lösung der Selbstkonsistenzgleichung bestimmt und finden sie die Temperatur T_c des ferromagnetischen Phasenüberganges.

Aufgabe 19 : (Anti)ferromagnetismus

Wir betrachten drei in den Eckpunkten eines Dreicks angeordnete Ising-Spins mit $\sigma_{1,2,3} = \pm 1$. Die Energie einer Spinkonfiguration $\{\sigma_i\}$ ist durch

$$E(\{\sigma_i\}) = -2J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j$$

gegeben, wobei über alle Paare von Spins summiert wird.
a) Berechnen Sie die Energien, die das System annehmen kann, und geben Sie die jeweilige Entartung an. Skizzieren Sie das Termschema (d.h. die berechneten Energien) für $J > 0$ and $J < 0$.
b) Berechnen Sie die Zustandssumme und die freie Energie.
c) Berechnen Sie die Entropie und finden Sie den Grenzwert der Entropie für $T \to 0$ für $J > 0$ and $J < 0$. Begründen Sie die gefundenen Ergebnisse mit Hilfe des Termschemas.

Hausaufgaben

Hausaufgabe 16 : Wärmekapazität des Ising Modells in Molekularfeldnäherung *(7 Punkte)*

Wir betrachten erneut die Molekularfeldnäherung für das Ising-Modell,

$$E = -2J \sum_{\langle l,i \rangle} \sigma_l \sigma_i \quad \text{mit} \qquad J > 0 \; .$$

a) Drücken Sie nun jeden Spin durch die mittlere Magnetisierung $\bar{\sigma}$ und Fluktuationen aus, $\sigma_l = \bar{\sigma} + (\sigma_l - \bar{\sigma})$. Betrachten Sie nun obigen Ausdruck für die Energie und vernachlässigen Sie Terme in zweiter Ordnung in den Fluktuationen.
Zeigen Sie, dass für den Mittelwert der Energie der Ausdruck

$$\langle E \rangle = -J\bar{\sigma}^2 2dN$$

gefunden wird.
b) Bestimmen Sie aus obigem Ausdruck für die Energie die Wärmekapazität als Funktion der mittleren Magnetisierung $\bar{\sigma}$ (die durch die bekannte Selbstkonsistenzgleichung bestimmt ist). Finden Sie aus der Selbstkonsistenzgleichung die Magnetisierung für kleine Temperaturen und daraus die Wärmekapazität. Welchen Wert hat die Magnetisierung (und C_V) oberhalb der Übergangstemperatur T_c? Bestimmen Sie C_V für $T \nearrow T_c$ und skizzieren Sie die komplette Temperaturabhängigkeit von C_V.

Hausaufgabe 17 : Wärmekapazität des 1D-Ising Modells *(5 Punkte)*

Die Zustandssumme für ein 1D-Ising Modell (ohne äußeres Feld) mit N Spins und einer ferromagnetischen Kopplung $J > 0$ ist durch

$$Z = (2\cosh K)^N + (2\sinh K)^N$$

mit $K = 2J/(k_B T)$ gegeben.
a) Zeigen Sie allgemein, wie die Wärmekapazität $C_V = \frac{\partial E}{\partial T}$ aus Z bestimmt wird.
b) Betrachten Sie die Zustandssumme des 1D-Ising Modells für große N. Bestimmen Sie daraus C_V.
c) Untersuchen Sie die Grenzfälle großer und kleiner Temperaturen und skizzieren Sie Ihre Ergebnisse.