

Institut für Theoretische Physik II

Prof. Dr. F. Heidrich-Meisner

Sprechstunde: Do. 9-11 Uhr, Raum 02.782.

E-mail: heidrich-meisner@lmu.de

2. Übungsblatt Many-body physics with ultra-cold atomic gases

25.10.2012

Besprechung: Mittwoch, 31.10.2012**2.1: Fermienergie in einer harmonischen Falle in semiklassischer Näherung**

Wir betrachten ein ideales Fermigas mit N Teilchen in einer isotropen harmonischen Falle $V_{ext}(\mathbf{r}) = m\omega^2 \mathbf{r}^2/2$ in 3D wobei $\epsilon_{n_x, n_y, n_z} = \hbar\omega(n + 3/2)$ und $n = n_x + n_y + n_z$ (vergleiche Vorlesung).

- (a) Berechnen Sie E_F und T_F in semiklassischer Näherung im Sinne der lokalen Dichteapproximation, d.h., ersetzen Sie die normale Fermifunktion durch:

$$n_f(\epsilon, \mu) = \frac{1}{\exp[\beta(\mathbf{p}^2/2m - \mu + V_{ext}(\mathbf{r}))] + 1}.$$

Um die Gesamtteilchenzahl zu erhalten, müssen Sie über die Impulse \mathbf{p} und Ortsvektoren \mathbf{r} integrieren.

- (b) Vergleichen Sie mit dem in der Vorlesung angegebenen exakten Ergebnis für E_F und T_F . Überzeugen Sie sich davon, dass beide Ergebnisse im Grenzfall großer Teilchenzahlen übereinstimmen.

2.2: Zustandsdichte

Berechnen Sie die Zustandsdichte eines idealen und homogenen Gases in (a) 1D, (b) 2D und (c) 3D. Wie hängt die Fermi-Energie von der Dichte $n = N/L^d$ ab (für 1D, 2D, 3D; d ist die räumliche Dimension, das Volumen ist $V = L^d$)?

2.3: Hyperfein Wechselwirkung

Die Hyperfeinwechselwirkung spaltet die Energieniveaus eines Atoms auf. Der Hamiltonoperator ist:

$$H_{hf} = A \mathbf{I} \cdot \mathbf{J}$$

wobei \mathbf{I} der Gesamtdrehimpuls des Kerns und \mathbf{J} der Gesamtdrehimpuls der Elektronenhülle ist (A ist eine Konstante).

- (a) Bestimmen Sie die Lage der Hyperfeinniveaus als Funktion der Quantenzahlen I, J und F , wobei

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}.$$

- (b) Was ergibt sich für Alkaliatome? Was ergibt sich speziell für den Fall $I = 3/2$?

2.4: Zeeman-Effekt

In einem äußeren Magnetfeld \mathbf{B} werden die Energieniveaus weiter aufgespalten. Der Hamiltonoperator ist dann:

$$H_{spin} = A\mathbf{I} \cdot \mathbf{J} + B(CJ_z + DI_z)$$

wobei C und D Konstanten sind und wir angenommen haben, dass das Magnetfeld in z -Richtung zeigt. Betrachten Sie Alkaliatome ($J = 1/2$) und den Spezialfall $I = 3/2$. Nutzen Sie aus, dass die z -Komponente des Gesamtdrehimpulses erhalten ist (d.h., $m_F = m_I + m_J$ ist eine gute Quantenzahl) und berechnen Sie die Lage aller Energieniveaus als Funktion von B .