Lösung Blatt 11 - Präsenzaufgaben

January 12, 2012

Aufgabe 1 Streuung am Hindernis

Wir betrachten die Streuung eines einzelnen Teilchens in 2D am Potential

$$V(\vec{r}) \quad = \quad V_0 \left\{\delta(x-a) + \delta(x+a)\right\} \left\{\delta(y-a) + \delta(y+a)\right\}. \tag{1}$$

Betrachten wir ferner ein Teilchen, welches mit dem Impuls $\vec{k}_i$ einfällt. Gemäß **Fermi's goldener Regel** erhalten wir als Streurate

$$\Gamma_{\vec{k}_f \leftarrow \vec{k}_i} \quad = \quad \frac{2\pi}{\hbar} \left| \left\langle \vec{k}_f \left| \hat{V} \right| \vec{k}_i \right\rangle \right|^2 \delta(E_{k_i} - E_{k_f}). \tag{2}$$

Hier bezeichnet $E_k = \hbar^2 k_i^2/2m$ die Energie des freien Teilchens mit der Masse m. Nachdem das Potential V **zeitunabhängig** ist muss gelten $E_{k_i} = E_{k_f}$ für $\Gamma_{\vec{k}_f \leftarrow \vec{k}_i} \neq 0$. Formal können wir nun im weiteren eine zweidimensionale Box mit Kantenlänge L und periodischen Randbedingungen betrachten. Damit ist

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle \vec{k}_f \left| \hat{V} \right| \vec{k}_i \right\rangle \right|^2 \quad &= \quad \frac{1}{L^4} \left| \int d^2\vec{r}\, e^{i\vec{r}(\vec{k}_i - \vec{k}_f)} V(\vec{r}) \right|^2 &(3)\\
&= \quad \frac{V_0^2}{L^4} \left| e^{iq_x a + iq_y a} + e^{iq_x a - iq_y a} + e^{-iq_x a + iq_y a} + e^{-iq_x a - iq_y a} \right|^2 &(4)\\
&= \quad \frac{16 V_0^2}{L^4} \cos^2(q_x a) \cos^2(q_y a). &(5)
\end{aligned}$$

Hier haben wir den Impulsübertrag $\vec{q} = \vec{k}_f - \vec{k}_i = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}$ eingeführt. Aufgrund der Energierhaltung gilt $|\vec{q} + \vec{k}_i|^2 = |\vec{k}_i|^2$ und damit $q^2 + 2\vec{q}\vec{k}_i = 0$. Nun kann man die Streurate für gegebenes $\vec{k}_i = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}$ als Funktion des Streuwinkels φ darstellen. Letzterer sei hier definiert als $\vec{k}_f \vec{k}_i / k^2 = \cos\varphi$. Aus der

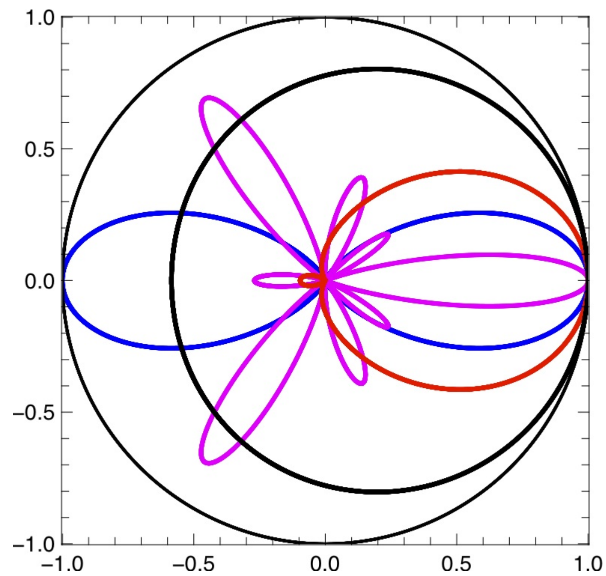

Figure 1: Polardarstellung von Eq. (8). Der Radius $r = \frac{\Gamma_{\vec{k}_f \leftarrow \vec{k}_i}}{\Gamma_{\vec{k}_i \leftarrow \vec{k}_i}}$ ist propotional zur Stärke der Streuung mit dem Streuwinkel φ. Hier fällt das Teilchen mit $\vec{k}_i = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}$ ein. Hier $k = 0$ (grau), $k \ll a$ (schwarz), $k = 0.6\pi/2a$ (rot), $k = \pi/2a$ (blau) und $k = 4.2/a$ (magenta).

Energieerhaltung folgt (da $q_x \leq 0$)

$$q_y = \sqrt{2|q_x|k - q_x^2}, \quad q_x \in [-2k, 0]. \tag{6}$$

Ferner gilt $q_x = k(\cos\varphi - 1)$, so dass

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_{\vec{k}_f \leftarrow \vec{k}_i}}{\Gamma_{\vec{k}_i \leftarrow \vec{k}_i}} &= \cos^2(q_x a)\cos^2(q_y a) \\ &= \cos^2(ka[1-\cos\varphi])\cos^2(ka\sin\varphi) \qquad (7) \\ &= \cos^2\left[2ka\sin^2(\frac{\varphi}{2})\right]\cos^2(ka\sin\varphi). \qquad (8) \end{aligned}$$

Man kann diese Rate nun in Polarkoordinaten visualisieren. Hierfür definiert man z.B. den 'Radius' $r = \frac{\Gamma_{\vec{k}_f \leftarrow \vec{k}_i}}{\Gamma_{\vec{k}_i \leftarrow \vec{k}_i}}$ und trägt $r(\varphi)$ gegen φ für gegebenes k auf.

Aufgabe 2 Lindblad-Mastergleichung

Wir betrachten einen schwach gedämpften Oszillator (welcher z.B. an ein Bad der Temperatur $T = 0$ gekoppelt ist). Die entsprechende Lindblad Mastergleichung ist dann gegeben durch

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}] + \Gamma \left\{ \hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \frac{1}{2}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} \right\}. \tag{9}$$

Wir betrachten hier lediglich die ersten zwei Oszillator Level, d.h. lediglich ρ_{00}, ρ_{01}, ρ_{10} und ρ_{11} sind ungleich null. Wir erhalten die folgenden Differentialgleichungen für die Matrixelemente

$$\dot{\rho}_{00} = \Gamma\rho_{11} \tag{10}$$

$$\dot{\rho}_{11} = -\Gamma\rho_{11} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{01} &= \frac{1}{i\hbar}(H_{00}\rho_{01} - \rho_{01}H_{11}) - \frac{\Gamma}{2}\rho_{01} \\ &= i\omega\rho_{01} - \frac{\Gamma}{2}\rho_{01}. \end{aligned} \tag{12}$$

Allgemein gilt (falls man beliebige n zulässt) $\dot{\rho}_{nn} = (n+1)\Gamma\rho_{n+1} - n\Gamma\rho_n$. Die Dephasierungsrate der Nichtdiagonalelemente ist $\Gamma/2$.