Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg

WS 2012/2013

Institut für Theoretische Physik II
Prof. Dr. F. Heidrich-Meisner
Sprechstunde: Do. 9-11 Uhr, Raum 02.782.
E-mail: heidrich-meisner@lmu.de

9. Übungsblatt Many-body physics with ultra-cold atomic gases

11.12.2012
Besprechung: Dienstag, 18.12.2012

9.1: Bogoliubov-Gleichungen

Wir wollen die Anregungen eines wechselwirkenden Bosegases ausgehend von der zeitabhängigen Gross-Pitaevskii-Gleichung berechnen. Diese Gleichung lautet:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\boldsymbol{r},t) + V(\boldsymbol{r})\Psi(\boldsymbol{r},t) + U_0|\Psi(\boldsymbol{r},t)|^2\Psi(\boldsymbol{r},t) \tag{1}$$

Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Zerlegen Sie $\Psi(\boldsymbol{r},t) = \Psi_0(\boldsymbol{r},t) + \delta\Psi(\boldsymbol{r},t)$, wobei $\Psi_0(\boldsymbol{r},t)$ das ungestörte Kondensat ohne Anregungen beschreibt. Leiten Sie je eine Gleichung für $\delta\Psi(\boldsymbol{r},t)$ und $\delta\Psi^*(\boldsymbol{r},t)$ her.

(b) Machen Sie für $\delta\Psi(\boldsymbol{r},t)$ den Ansatz

$$\delta\Psi(\boldsymbol{r},t) = \exp(-i\mu t/\hbar)[u(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t} + v^*(\boldsymbol{r})e^{i\omega t}]\,.$$

mit unbekannten Funktionen $u(\boldsymbol{r})$ und $v(\boldsymbol{r})$ und reellem ω. Setzen Sie in die Gleichungen aus (a) ein und leiten Sie Bestimmungsgleichungen für $u(\boldsymbol{r})$ und $v(\boldsymbol{r})$ ab. Beachten Sie, dass die ungestörte Teilchendichte $n_0(\boldsymbol{r}) = |\Psi_0(\boldsymbol{r},t)|^2$ ist.

(c) Betrachten Sie dann das homogene Bosegas in einem Volumen $V = L^3$, d.h., $V(\boldsymbol{r}) = 0$ und machen Sie den Ansatz (V ist das Volumen)

$$u(\boldsymbol{r}) = \frac{u_q}{\sqrt{V}}e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}; \quad v(\boldsymbol{r}) = \frac{v_q}{\sqrt{V}}e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\,.$$

Nutzen Sie aus, dass $\mu = U_0 n_0$ ist und leiten Sie algebraische Gleichungen für u_q und v_q her. Bestimmen Sie daraus die Anregungsenergie $\epsilon_q = \hbar\omega$.

9.2: Solitonen

Die zeitabhängige Gross-Pitaevskii Gleichung ist eine nicht-lineare DGL für das klassische Feld $\Psi(\boldsymbol{r},t)$. Daher können solitonische Lösungen auftreten. Wir betrachten ein homogenes Gas in einer Dimension.

(a) Machen Sie den Ansatz

$$\Psi(x,t) = f(x-ut)e^{-i\mu t/\hbar}$$

und leiten Sie eine DGL für f ab (betrachten Sie ein homogenes System). Verwenden Sie, dass das chemische Potential durch $\mu = n_0 U_0$ gegeben ist, wobei n_0 die ungestörte Dichte ist.
Hinweis: Wir suchen Lösungen, für die die Dichte $n(x) \to n_0$ geht für $x \to \pm\infty$.

(b) Zerlegen Sie f wie folgt:

$$f = f_0(\alpha(\tilde{x}) + i\beta(\tilde{x}))\,,$$

wobei α und β reelle Funktionen von $\tilde{x} = (x-ut)/\zeta$ sind ($\zeta^2 = \hbar^2/(2mn_0U_0)$ ist die *healing length* und $n_0 = f_0^2$). Wie müssen sich α und β für $\tilde{x} \to \pm\infty$ verhalten? Nehmen sie an, dass $\beta = const = \beta_0$. Leiten Sie folgendes Gleichungssystem ab (α' bezeichnet die Ableitung nach $\tilde{x}$):

$$\alpha'' + (1-\alpha^2-\beta_0^2)\alpha = 0 \qquad (2)$$

$$(1-\alpha^2-\beta_0^2)\beta_0 = \frac{\sqrt{2}u}{s}\alpha' \qquad (3)$$

wobei $s = \sqrt{n_0U_0/m}$. Zeigen Sie, dass

$$\alpha = \alpha_0 \tanh\left(\frac{(x-ut)\alpha_0}{\sqrt{2}\zeta}\right)$$

eine Lösung ist. Bestimmen Sie α_0.

(c) Was ist die physikalische Bedeutung der Größen ζ und s?