Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik II

Wintersemester 2012/13, Universität Erlangen-Nürnberg, Dozent: Prof. Florian Marquardt

Blatt 2 - Abgabetermin: Mittwoch, 30.10.2013, in der Vorlesung

Exercises for the course Quantum Mechanics II

Winter term 2012/13, Universität Erlangen-Nürnberg, Prof. Florian Marquardt

Sheet 2 - Deadline: Wednesday, 30.10.2013, during the lecture

Präsenzübungen (Exercises during the tutorial)

Allgemeiner Hinweis: Fertigen Sie so oft wie möglich saubere Skizzen an, in denen auch wesentliche Längen, Frequenzen, Periodizitäten etc. vermerkt sind. Überlegen Sie sich selbst weitergehende Fragestellungen.

General hint: Whenever possible, always make clear sketches that include essential length and frequency scales, periodicities etc. Also think about other possible questions.

1. Zweiniveausystem (sehr wichtig!) – Betrachten Sie ein Zweiniveausystem, mit den beiden Basiszuständen $|L\rangle$ und $|R\rangle$. Der Hamiltonoperator habe die Diagonaleinträge $\left\langle L\middle|\hat{H}\middle|L\right\rangle = E_L$ und $\left\langle R\middle|\hat{H}\middle|R\right\rangle = E_R$. Beide Zustände seien außerdem verknüpft durch ein Matrixelement $\left\langle L\middle|\hat{H}\middle|R\right\rangle = \left\langle R\middle|\hat{H}\middle|L\right\rangle = g$, das wir hier der Einfachheit halber reell und positiv annehmen. Das wäre z.B. das Tunnelmatrixelement für zwei durch eine Barriere getrennte lokalisierte Zustände in einem Doppelmuldenpotential. Schreiben Sie die Hamiltonmatrix in dieser Basis explizit auf. Diagonalisieren Sie diese Matrix und finden Sie dadurch die Energieeigenzustände $|\Psi_\pm\rangle$ und Eigenenergien. Der Einfachheit halber können Sie vor der Rechnung setzen: $E_L = +E/2$ und $E_R = -E/2$, d.h. E ist der energetische Abstand zwischen den beiden ursprünglichen Niveaus (es sei $E > 0$, um Fallunterscheidungen zu vermeiden). Diskutieren Sie, wie die neuen Eigenenergien gegenüber $E_{L,R}$ verschoben sind, und diskutieren Sie, wie die neuen Eigenfunktionen im Vergleich zu den alten (denen bei $g = 0$) aussehen, speziell auch für die Bereiche $E \ll g$ und $E \gg g$. Was bedeuten diese Erkenntnisse für die Eigenzustände im Doppelmuldenpotential?

Zeichnen Sie die neuen Energien $E_\pm$ als Funktion von E bei festem g (die erhaltene Formel gilt auch für negative E).

1. Two-level system (very important!) – Consider a two-level system with basis states $|L\rangle$ and $|R\rangle$. The Hamiltonian matrix has the diagonal entries $\left\langle L\middle|\hat{H}\middle|L\right\rangle = E_L$ und $\left\langle R\middle|\hat{H}\middle|R\right\rangle = E_R$. The states are coupled by the matrix element $\left\langle L\middle|\hat{H}\middle|R\right\rangle = \left\langle R\middle|\hat{H}\middle|L\right\rangle = g$, which, for simplicity, we assume is real and positive. This could, for instance, correspond to the tunneling matrix element between two separate localized states in a double-well potential. Please write down the Hamiltonian matrix explicitly and diagonalize it by introducing the enery eigenstates $|\Psi_\pm\rangle$ and the corresponding energies. For reasons of convenience, you can choose the zero of energy in between the original energy levels so that $E_L = +E/2$ and $E_R = -E/2$ with $E > 0$ the energy splitting. Discuss how the new energy levels are shifted compared to the original levels $E_{L,R}$ and what the new eigenstates look like compared to the old ones (the ones with $g = 0$), in particular when $E \ll g$ and $E \gg g$. What do these results mean for the eigenstates in a double-well potential? Please plot the new eigenenergies $E_\pm$ as a function of E with fixed g (the formula you found also applies to the case of $E < 0$).

2. Heisenbergsche Unschärferelation – Gegeben seien zwei hermitesche Operatoren (also Observablen) $\hat{A}$ und $\hat{B}$. Beweisen Sie die allgemeine Unschärferelation

$$\left\langle \hat{A}^2 \right\rangle \left\langle \hat{B}^2 \right\rangle \geq \frac{1}{4} \left(\left| \left\langle \left[\hat{A}, \hat{B} \right] \right\rangle \right|^2 + \left\langle \left[\hat{A}, \hat{B} \right]_+ \right\rangle^2 \right),$$

wobei diese für einen beliebigen Zustand $|\Psi\rangle$ gilt, und wir der Kürze halber gesetzt haben $\left\langle \hat{C} \right\rangle \equiv \left\langle \Psi \left| \hat{C} \right| \Psi \right\rangle$ für beliebige Operatoren $\hat{C}$.

Hinweis: Wenden Sie auf die Vektoren $|\varphi_A\rangle \equiv \hat{A} |\Psi\rangle$ und $|\varphi_B\rangle \equiv \hat{B} |\Psi\rangle$ die Cauchy-Schwartz-Ungleichung an, die besagt, dass das Skalarprodukt niemals größer wird als das Produkt der Längen:

$$|\langle \varphi_A | \varphi_B \rangle|^2 \leq \langle \varphi_A | \varphi_A \rangle \langle \varphi_B | \varphi_B \rangle .$$

Verwenden Sie sodann den Trick $\hat{A}\hat{B} = ([\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{B}]_+)/2$, und nutzen Sie aus, dass der Kommutator zweier hermitescher Operatoren immer rein imaginär ist (zeigen Sie das!), während der Antikommutator rein reell ist. Dadurch kann das Betragsquadrat auf der linken Seite der Ungleichung ausgewertet werden.

Zu guter Letzt: Setzen Sie $\hat{A} = \hat{x} - \langle \hat{x} \rangle$ und $\hat{B} = \hat{p} - \langle \hat{p} \rangle$, und zeigen Sie damit, dass aus der allgemeinen Variante insbesondere die bekannte Heisenbergsche Ungleichung für Ort und Impuls folgt.

2. Heisenberg uncertainty principle – Consider two given Hermitian operators (which represent physical observables) $\hat{A}$ and $\hat{B}$. Please prove the general uncertainty principle

$$\left\langle \hat{A}^2 \right\rangle \left\langle \hat{B}^2 \right\rangle \geq \frac{1}{4} \left(\left| \left\langle \left[\hat{A}, \hat{B} \right] \right\rangle \right|^2 + \left\langle \left[\hat{A}, \hat{B} \right]_+ \right\rangle^2 \right),$$

for an arbitrary state $|\Psi\rangle$. Here, we have introduced the short-hand notation $\left\langle \hat{C} \right\rangle \equiv \left\langle \Psi \left| \hat{C} \right| \Psi \right\rangle$ with an arbitrary operator $\hat{C}$.

Hint: Apply the Cauchy-Schwartz inequality to the state vectors $|\varphi_A\rangle \equiv \hat{A} |\Psi\rangle$ and $|\varphi_B\rangle \equiv \hat{B} |\Psi\rangle$. This inequality states that the scalar product of two vectors never exceeds the product of their lengths

$$|\langle \varphi_A | \varphi_B \rangle|^2 \leq \langle \varphi_A | \varphi_A \rangle \langle \varphi_B | \varphi_B \rangle .$$

Furthermore, use the identntiy $\hat{A}\hat{B} = ([\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{B}]_+)/2$ and the fact that the commutator of two Hermitian operators is purely imaginary (prove this), while their anti-commutator is real. Using this, you can rewrite the left-hand side of the inequality.

Last (but not least): write $\hat{A} = \hat{x} - \langle \hat{x} \rangle$ and $\hat{B} = \hat{p} - \langle \hat{p} \rangle$, and prove that, in this case, the general form of the uncertainty principle yields the well-known Heisenberg inequality for position and momentum.

Hausaufgabe (Homework exerises)

3. Impulsdarstellung und Unschärferelation – Betrachten Sie ein Teilchen im allgemeinen Gauß-Zustand

$$\Psi(x) = \mathcal{N} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{4\sigma^2} + ik_0 x}$$

Skizzieren Sie $|\Psi(x)|^2$ und auch $\mathrm{Re}\Psi(x)$. Berechnen Sie sodann die Impulsdarstellung von Ψ, d.h. die Funktion $\tilde{\Psi}(p) \equiv \langle p | \Psi \rangle$, wobei bekanntlich $\langle x | p \rangle = e^{ipx/\hbar}/\sqrt{2\pi\hbar}$. Skizzieren Sie $\left| \tilde{\Psi}(p) \right|^2$. Berechnen Sie explizit die Breite im Ortsraum $\Delta x^2 \equiv \left\langle (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 \right\rangle$ und die Breite im Impulsraum,

$\Delta p^2 \equiv \left\langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \right\rangle$ für diesen Zustand (die Normierungskonstante $\mathcal{N}$ können Sie ggf. aus der früheren Hausaufgabe übernehmen). Zeigen Sie, dass solche Gauß-Zustände die Heisenbergsche Unschärferelation gerade ausschöpfen, d.h. dass dort das Gleichheitszeichen gilt und die Unschärfen relativ zueinander so klein wie möglich sind.

3. Momentum represention and the uncertainty principle – Consider a particle in a general Gaussian state

$$\Psi(x) = \mathcal{N} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{4\sigma^2} + ik_0 x}$$

Sketch $|\Psi(x)|^2$ as well as $\mathrm{Re}\Psi(x)$. Also calculate the momentum representation of Ψ, i.e. the function $\tilde{\Psi}(p) \equiv \langle p|\Psi\rangle$, where $\langle x|p\rangle = e^{ipx/\hbar}/\sqrt{2\pi\hbar}$. Sketch $\left|\tilde{\Psi}(p)\right|^2$. Calculate the variance in real space $\Delta x^2 \equiv \left\langle (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 \right\rangle$ as well as in momentum space, $\Delta p^2 \equiv \left\langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \right\rangle$ for this state (you can take the normalization constant $\mathcal{N}$ from last week's homework). Prove that these Gaussian states are minimal uncertainty states, i.e. that the uncertainty principle for position and momentum applies with the equality sign.

4. Heisenbergsche Bewegungsgleichungen – Gegeben sei der Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Operatoren $\hat{p}(t)$ und $\hat{x}(t)$ im Heisenbergbild auf. Was ist also die mittlere Kraft $\frac{d\langle \Psi(t)|\hat{p}|\Psi(t)\rangle}{dt}$?

4. Heisenberg equations of motion – Consider the general Hamiltonian

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$$

Derive the equations of motion for the operators $\hat{p}(t)$ and $\hat{x}(t)$ in the Heisenberg picture. What is the average force $\frac{d\langle \Psi(t)|\hat{p}|\Psi(t)\rangle}{dt}$?