Statistische Physik und Thermodynamik

WS 2010/2011, Studienziel Bachelor, TP-4

Dozent: F. Marquardt   Übungen: B. Kubala

Übungsblatt 6   Abgabe: 02.12 2010

Präsenzaufgaben

Aufgabe 14 : Fermionische Besetzung

Geben Sie einen Ausdruck für die Besetzung $n = N/V$ eines elektronischen Bandes mit Zustandsdichte

$$\frac{D(\varepsilon)}{V} = \begin{cases} 0 & : \quad \varepsilon < 0 \\ D_0 = \text{konst.} & : \quad \varepsilon > 0 \end{cases}$$

durch Fermionen an und werten Sie den Ausdruck für $T = 0$ in Abhängigkeit vom chemischen Potential μ aus. Skizzieren Sie $n(\mu)$ für $T = 0$ und für endliche Temperatur.
Betrachten Sie wie in Aufgabe 13 Valenz- und Leitungsband in einem Halbleiter. Skizzieren Sie $n(\mu)$ für die entsprechende Zustandsdichte und diskutieren Sie wiederum die in Aufgabe 13 gefundene Temperaturabhängigkeit des chemischen Potentials.

Aufgabe 15 : Weiße Zwerge

Als weißen Zwerg bezeichnet man einen sehr alten Stern in einer der möglichen Endphasen seines Sternenlebens. Der Stern kann dabei nicht mehr Energie durch Fusion erzeugen und besteht aus N Elektronen und den dazugehörigen vollständig ionisierten Ionenrümpfen (überwiegend besteht der weiße Zwerg aus Sauerstoff und Kohlenstoff, so dass $M_{\text{Ionen}} = 2m_p N$ mit der Protonenmasse m_p). Die Gravitationskräfte zwischen den Ionen wollen den Stern zusammenziehen, was der Entartungsdruck der fermionischen Elektronen verhindert.
Wir wollen ein einfaches Modell eines solchen Sterns betrachten, indem wir die relevanten Energien grob (bis auf numerische Vorfaktoren) abschätzen:
a) Die Gesamtenergie der Elektronen kann zunächst über die Fermienergie (nichtrelativistischer) Elektronen abgeschätzt werden. Nehmen Sie dabei eine konstante Dichteverteilung der Elektronen über den Sternradius R an. Da $E_F \gg k_B T$ können wir $T = 0$ annehmen.
b) Die Gravitationsenergie werde durch $E_{\text{Grav}} \sim -GM^2_{\text{Ionen}}/R$ abgeschätzt. Skizzieren Sie die Gesamtenergie und finden Sie den Sternradius aus deren Minimum. Wie verhält sich der Sternradius für zunehmende Masse des Sterns?
c) Für kleinen Sternradius nimmt die Fermienergie (die kinetische Energie) der Elektronen so stark zu, dass relativistische Effekte wichtig werden. Wir nehmen daher jetzt die ultrarelativistische Dispersionrelation der Elektronen (ultrarelativistisch: für $p \gg m_e c$) $\varepsilon \approx pc = \hbar kc$ an.
Vollziehen Sie dieselben Schritte wie in a) und b). In Abhängigkeit von der Gesamtmasse des Sterns finden Sie nun $R \to \infty$ (dann gilt wieder das nichtrelativistische Ergebnis von oben) oder einen kollabierenden Stern, $R \to 0$, wenn die Masse einen gewissen Schwellenwert übersteigt.
Finden Sie diese maximale Masse (die sog. Chandrasekhar-Masse) eines weissen Zwerges.

Hausaufgaben

Hausaufgabe 12 : Zustandsdichte *(6 Punkte)*

Wir betrachten die Dispersionsrelationen

$$\varepsilon_{\text{rel}} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} \quad \text{mit } \vec{p} = \hbar\vec{k} \quad \text{für relativistische Teilchen}$$

$$\varepsilon_{\text{BEC}} = \hbar v_s \sqrt{k^2\left[1 + \hbar^2k^2/(2mv_s)^2\right]} \quad \text{für Anregungen in einem Bose-Einstein Kondensat.}$$

a) Skizzieren Sie zuächst die Dispersionrelationen und diskutieren Sie die jeweiligen Grenzfälle für kleine und große Wellenzahlen k.
b) Berechnen Sie die Zustandsdichte in drei Dimensionen für die beiden Dispersionsrelationen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis in den entsprechenden Grenzfällen mit Ihnen bereits bekannten Zustandsdichten.
(Hinweis: Zur Untersuchung der Grenzfälle für die Zustandsdichte der Anregungen im BEC können Sie die entsprechenden Näherungen einführen, bevor Sie die Energieableitung der Zustandsanzahl durchführen.)

Hausaufgabe 13 : Bose-Einstein Verteilung in 2 Dimensionen *(6 Punkte)*

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass es in drei Dimensionen im Grenzfall tiefer Temperaturen zur Bose-Einstein Kondensation kommt. Wir betrachten nun denselben Grenzfall im zweidimensionalen:
a) Betrachten Sie den Integralausdruck für die Teilchenzahl in zwei Dimensionen. Finden Sie das dimensionslose Integral I_{2D}, so dass

$$N = \frac{L^2}{\lambda_{\text{th}}^2} \cdot I_{2D}\,.$$

(Zwischenergebnis: $I_{2D} = \int_0^\infty \frac{dx}{e^{-\beta\mu}e^x - 1}$.)

Da $\lambda_{\text{th}} \to \infty$ für $T \to 0$ muss I_{2D} ebenfalls divergieren, wenn der gesamte Ausdruck für die Teilchenzahl N endlich bleiben soll. Daher wollen wir zunächst zeigen, dass I_{2D} für $\beta\mu = 0$ tatsächlich divergiert. Schließlich kann man die Temperaturabhängigkeit von μ finden, für die der gesamte Ausdruck für die Teilchenzahl konstant bleibt.

b) Skizzieren Sie den Integranden für kleines (aber endliches) $\beta\mu < 0$. Das Verhalten des Integranden für kleine Werte der Integrationsvariable x finden Sie durch Entwicklung um $x = \beta\mu$.
c) Die Divergenz des Integrals für $\beta\mu \to 0$ wird durch das Verhalten des Integranden für kleine Werte der Integrationsvariable x bestimmt für die obige Entwicklung gültig ist. Leiten Sie aus dieser Überlegung die Abhängigkeit des Integrales von $\beta\mu$ her, indem Sie das Integral am unteren Rand auswerten.
(Zwischenergebnis: $I_{2D} \approx -\ln(-\beta\mu)$.)

d) Wie muss nun μ von der Temperatur abhängen, damit die Teilchenzahl N für $T \to 0$ konstant bleibt? Vergleichen Sie diese Temperaturabhängigkeit von μ mit dem in der Vorlesung behandelten dreidimensionalen Fall und erläutern Sie die Konsequenzen für das Auftreten von Bose-Einstein Kondensation.