Statistische Physik und Thermodynamik

WS 2010/2011, Studienziel Bachelor, TP-4

Dozent: F. Marquardt   Übungen: B. Kubala

Übungsblatt 1   Abgabe: 28.10 2010

Präsenzaufgaben

Aufgabe 1 : Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wir betrachten allgemeine Wahrscheinlichkeitsverteilungen für diskrete Ereignisse, $P_n,\ n \in \mathbb{N}$, und für kontinuierliche Ereignisse, $\rho(x),\ x \in \mathbb{R}$.
a) Geben Sie für beide Fälle Ausdrücke für den Mittelwert und für die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert an.
b) Berechnen Sie Mittelwert und mittlere quadratische Abweichung für einen idealen Würfel. Was ist P_n?
c) Wie berechnet man für P_n und $\rho(x)$ die Wahrscheinlichkeit einen

- Wert größer als x_0
- Wert zwischen x_0 und x_1
- irgendeinen Wert

zu finden?
d) Betrachten Sie nun eine beliebige Funktion G_n bzw. $g(x)$. Was ist der Erwartungswert von G, bzw. g. Geben Sie Funktionen an, mit deren Hilfe Sie Mittelwert, quadratische Abweichung und die Wahrscheinlichkeiten in c) finden können.

Aufgabe 2 : Messung

Eine Zufallsvariable x werde in N unabhängigen Messungen gemessen, wobei sich Messwerte $x_1, x_2, \ldots,\ x_N$ ergeben. Hieraus können Größen

$$x_0 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \quad \text{und} \quad s^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \langle x \rangle)^2$$

bestimmt werden.
a) Zeigen Sie $x_0 = \langle x \rangle$ und $s = \sigma = \sqrt{\langle x^2 - \langle x \rangle^2 \rangle}$ für $N \to \infty$.
b) Beweisen Sie nun $\langle x_0 \rangle = \langle x \rangle$ und $\langle s^2 \rangle = \sigma^2$ für endliches N.

Aufgabe 3 : Binomialverteilung

a) Wieviele verschiedenen Möglichkeiten gibt es, bei M Würfen einer Münze n mal Kopf zu finden?
b) Ein Betrunkener vollführt eine Zufallsbewegung, indem er in jedem Zeitschritt mit einer Wahrscheinlichkeit p einen Meter nach rechts, mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ einen Meter nach links torkelt. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(M, n)$ an, den Betrunkenen nach M Zeitschritten n Meter rechts vom Ausgangsort entfernt zu finden. Skizzieren Sie $P(M, n)$.

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle n \rangle,\ \langle n^2 \rangle,\ \langle n^3 \rangle,\ \langle n^4 \rangle$.
d) In einem Kanister des Volumens V seien $M = 10^{24}$ Gasatome gleichmässig verteilt. Betrachten Sie ein Teilvolumen $v = V/100$ des Kanisters. Wieviele Atome erwartet man im Volumen v zu finden? Wie groß ist die relative Schwankung der Zahl der Atome, die sich in v befinden?

Aufgabe 4: Poissonverteilung

a) Die Wahrscheinlichkeit $P(M, n)$ dafür, dass ein durch die Wahrscheinlichkeit p charakterisiertes Ereignis bei M Versuchen n-mal eintrifft, ist durch die Binomialverteilung

$$P(M, n) = \frac{M!}{n!(M-n)!} p^n (1-p)^{M-n}$$

gegeben. Betrachten Sie eine Situation, bei der die Wahrscheinlichkeit p sehr klein ist und man an dem Fall $n \ll M$ interessiert ist. Zeigen Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung dann in die Form einer Poisonverteilung

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} \quad \text{mit } \bar{n} = Mp$$

bringen lässt.
b) Berechnen Sie für die Poissonverteilung die Normierung, den Mittelwert $\langle n \rangle$, und die Varianz σ mit $\sigma^2 = \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle$, und skizzieren Sie die Verteilung.

Aufgabe 5: Normalverteilung

Betrachten Sie eine Gaussfunktion $e^{-\alpha x^2}$.
a) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2}$. (Hinweis: Betrachten Sie das Quadrat der gesuchten Größe und wechseln Sie zu Polarkoordinaten.)
b) Berechen Sie die Momente $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^n\, e^{-x^2}$ für $x = 1, 2, 3, 4, 5$.
c) Geben Sie eine auf der Gaussverteilung beruhende Wahrscheinlichkeitsverteilung an, die normiert ist, den Mittelwert x_m und die Varianz σ hat und skizzieren Sie diese Verteilung, die sogenannte Normalverteilung.
d) Die Geschwindigkeitsverteilung eines Gases hat die Form einer Gaussverteilung

$$\rho(\vec{v}) \propto \exp\left(-\frac{m\vec{v}^2}{2k_B T}\right).$$

Bestimmen Sie die Normierung und geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Betrag der Geschwindigkeit $v = |\vec{v}|$ in drei Raumdimensionen an.

Hausaufgaben

Hausaufgabe 1: Maxwell-Geschwindigkeitsverteilung *(4 Punkte)*

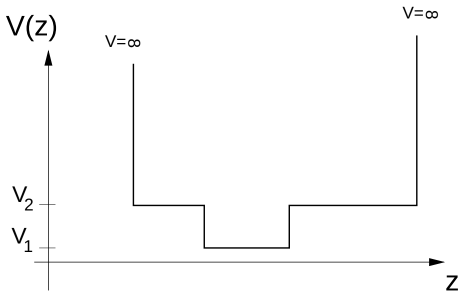
Wir betrachten die sogenannte Maxwell-Geschwindigkeitsverteilung eines Gases der Form

$$\rho(\vec{v}) \propto \exp\left(-\frac{m\vec{v}^2}{2k_BT}\right)$$

aus Aufgabe 5d).
Bestimmen Sie den wahrscheinlichsten Geschwindigkeitsbetrag $v^{\max}$, den wahrscheinlichsten Wert für die x-Komponente der Geschwindigkeit $v_x^{\max}$, und die Erwartungswerte $\langle\vec{v}\rangle,\ \langle v\rangle,\ \langle v_x^2\rangle,\ \langle v^2\rangle$.

Hausaufgabe 2: Barometrische Höhenformel *(8 Punkte)*

a) Wir betrachten ein stückweise konstantes Potential $V(z)$ (siehe Skizze). Skizzieren Sie die Dichteverteilung eines Gases in diesem Potential für kleine, mittlere und große Temperatur, wobei k_BT zu diesem Zweck mit $V_2 - V_1$ zu vergleichen ist.



b) Betrachten Sie ein logarithmisches Zentralpotential

$$V(r) = \begin{cases} V_0 \ln(r/r_0) & : \quad a < r < b \\ \infty & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

in $d = 1, 2, 3$ Raumdimensionen. Geben Sie die Dichteverteilung $\rho(\vec{r})$ eines Gases in einem Zentralpotential der angegebenen Form an. Was passiert mit der Normierung $\tilde{Z} = \int d^d r \rho(\vec{r})$, wenn man die obere Grenze des Potentials b gegen Unendlich gehen lässt? Für welche Temperaturen ist die Dichte noch normierbar?
c) Wir betrachten nun das $1/r$ Gravitationspotential eines Planeten der Größe R_{min} in drei Dimensionen. Führen Sie wieder einen Abschneideradius R_{max} ein und skizzieren Sie die Dichteverteilung für verschiedene R_{max}.
Wie verhält sich die Normierungskonstante $\tilde{Z}$ für $R_{\text{max}} \to \infty$. Was bedeutet dies für den Anteil des Gases innerhalb eines festen Abstandes vom Planetenmittelpunkt? Ist die Planetenatmosphäre also stabil?