Statistische Physik und Thermodynamik

WS 2010/2011, Studienziel Bachelor, TP-4

Dozent: F. Marquardt   Übungen: B. Kubala

Übungsblatt 4   Abgabe: 18.11. 2010

Präsenzaufgaben

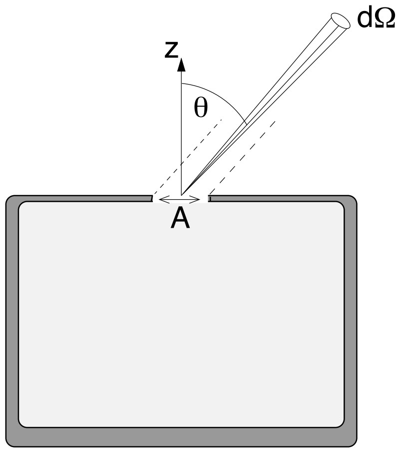
Aufgabe 10 : Entropie der Wärmestrahlung

Die Entropie eines harmonischen Oszillators

$$S^{H.O.} = \frac{\hbar\omega}{T}\langle n \rangle - k_B \ln\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right)$$

wurde in der Vorlesung berechnet. Geben Sie analog zu den Berechnungen in der Vorlesung einen Integralausdruck für die Gesamtentropie eines Wärmestrahlungsfeldes in drei Raumdimensionen an, wobei Sie $D(\omega) \propto \omega^2$ annehmen können.
Das Integral kann (mit partieller Integration) auf das Integral für die Gesamtenergie des Wärmestrahlungsfeldes zurückgeführt werden. Berechnen Sie damit das Verhältnis $S/\delta E$ für die Wärmestrahlung.

Aufgabe 11 : Emission von Wärmestrahlung

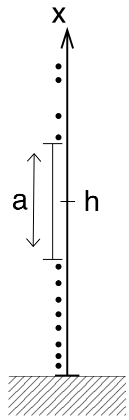


In der Vorlesung haben wir die Gesamtenergie und die Energiedichte, $\varepsilon = \frac{\delta E}{V} = 4\frac{\sigma}{c}T^4$ des elektromagnetischen Feldes in einem Hohlraum eines Körpers der Temperatur T berechnet, wobei σ als Stefan-Boltzmann Konstante bezeichnet wird. Wir wollen nun die Wärmestrahlung, die ein solcher Körper emittiert bestimmen.
Machen Sie sich zunächst klar, dass die abgestrahlte Leistung die Dimension von (dieselbe Einheit wie) Energiedichte·Fläche·Geschwindigkeit hat.
Man betrachte nun eine kleine Öffnung der Fläche A, die den Hohlraum mit der Außenwelt verbindet. Für die Strahlung in einer Richtung, die nicht senkrecht zur Öffnung steht, ist die Größe A_{eff} der Öffnung effektiv vermindert.
Zu der Wärmestrahlung in ein Raumwinkelelement $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ um die durch Winkel (θ, ϕ) definierte Richtung (siehe Skizze) trägt nur ein Teil der gesamten Energiedichte bei. Nämlich der Bruchteil, $d\varepsilon = \varepsilon d\Omega/(4\pi)$, der von den Photonen stammt, die sich in passender Richtung bewegen. Die in das Raumwinkelement $d\Omega$ abgestrahlte Leistung dP ist dann durch $dP = c\, A_{\text{eff}}\, d\varepsilon$ gegeben.
Finden Sie aus diesen Überlegungen die abgestrahlte Gesamtleistung, indem Sie über das Raumwinkelelement integrieren (nutzen Sie die Skizze, um zu erkennen, über welchen Winkelbereich sich die Integration erstreckt).

Hausaufgaben

Hausaufgabe 8 : Minimierung der freien Energie *(6 Punkte)*

Wir wollen an einem Beispiel zeigen, dass der Gleichgewichtswert eines makroskopischen Parameters eines Systems gefunden wird, indem man die freie Energie bezüglich des Parameters minimiert.
Dazu betrachten wir einen Ballon der Masse M, der in einem Gas nichtwechselwirkender Teilchen der Masse m schwebt, auf die das Schwerefeld $V(x) = mgx$ wirkt. Der Ballon habe eine Ausdehnung a, d.h. befindet sich die Mitte des Ballons in einer Höhe h wird dies durch ein Intervall $[h - \frac{a}{2}, h + \frac{a}{2}]$ in x-Richtung beschrieben, in dem sich keine Gasteilchen befinden können.



a) Finden Sie die Gleichgewichtsposition h_0 eines kleinen Ballons zunächst durch elementare Überlegungen zum Gleichgewicht zwischen Auftriebs- und Gewichtskraft.

b) Die Zustandssumme der N Gasteilchen für eine vorgegebene Höhe h des Ballons ist durch

$$e^{-\beta F(h)} = Z_h = \frac{1}{N!} \int \frac{dx_1 dx_2 \ldots dx_N}{\lambda_{\text{th}}^N} e^{-\beta(V(x_1, x_2, \ldots, x_N;\, h) + U(h))}$$

gegeben, wobei $x_1,\, x_2, \ldots,\, x_N$ die Position der N Gasatome bezeichnet.
Geben Sie $U(h)$ und $V(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_N;\; h)$ an.
Gasteilchen können sich nicht im Bereich des Ballons aufhalten, d.h. im Intervall $[h - \frac{a}{2}, h + \frac{a}{2}]$ wird $V = \infty$. Über welchen Bereich erstrecken sich dadurch effektiv die auftretenden Integrale?
c) Werten Sie die Zustandssumme aus. Es ist dafür sinnvoll den Parameter $\lambda = (\beta m g)^{-1}$ einzuführen, der die charakteristische Skala des Dichteabfalls des Gases im Schwerefeld angibt. Nehmen Sie im Folgenden $\lambda \gg a$ an.
d) Skizzieren Sie $F(h)$ in Abhängigkeit der Position h des Ballons. Finden Sie die Gleichgewichtsposition h_0 des Ballons durch Minimierung von F.

Hausaufgabe 9 : Plancksche Strahlung *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie die von der Sonne durch Wärmestrahlung ausgesendete Gesamtleistung. Der Sonnenradius beträgt $R_S = 7 \cdot 10^8$m, die Oberflächentemperatur der Sonne 5800K.
b) Die Erde reflektiert 30% der Sonnenstrahlung direkt, der Rest wird absorbiert und als Wärmestrahlung reemittiert. Berechnen Sie die Temperatur der Erde aus dem Gleichgewicht zwischen absorbierter und emittierter Strahlung. Der Abstand der Erde zur Sonne beträgt 8 Lichtminuten.
c) Betrachten Sie das Universum als dreidimensionalen Hohlraum mit Radius 10^{26}m und der gleichmäßigen Temperatur von 3K (Mikrowellenhintergrundstrahlung). Berechnen Sie die Gesamtenergie der Hintergrundstrahlung und schätzen Sie die Gesamtzahl der Photonen in dieser Strahlung ab.