Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik II

Blatt 7 - Präsenzübungen

Wintersemester 2011/12, Universität Erlangen, Prof. Florian Marquardt

Aufgabe 1: System von Fermionen in Superpositionszuständen

$$\begin{aligned}
\langle\Psi|c_2^\dagger c_1|\Psi\rangle &= \frac{1}{4}\langle 0|\big(c_3 + e^{-i\varphi}c_4\big)\big(c_1 + e^{-i\vartheta}c_2\big)c_2^\dagger c_1\big(c_3^\dagger + e^{-i\varphi}c_4^\dagger\big)\big(c_1^\dagger + e^{i\vartheta}c_2^\dagger\big)|0\rangle \\
&= \frac{1}{4}\langle 0|\big(c_3c_3^\dagger + c_4c_4^\dagger\big)\, e^{-i\vartheta}c_2c_2^\dagger c_1c_1^\dagger|0\rangle \\
&= \frac{1}{2}e^{-i\vartheta}
\end{aligned}$$

Der Ausdruck

$$\langle\Psi|c_4^\dagger c_1|\Psi\rangle = \frac{1}{4}\langle 0|\big(c_3 + e^{-i\varphi}c_4\big)\big(c_1 + e^{-i\vartheta}c_2\big)c_4^\dagger c_1\big(c_3 + e^{-i\varphi}c_4^\dagger\big)\big(c_1^\dagger + e^{i\vartheta}c_2^\dagger\big)|0\rangle$$

zeigt, dass es keine Kombination der Operatoren gibt, in der sich Auf- und Absteigeoperatoren des gleichen Typs die Waage halten. Daher verschwindet $\langle\Psi|c_4^\dagger c_1|\Psi\rangle$. Teilchen 1 ist mit Teilchen 2 verschränkt, aber nicht mit Teilchen 4.

Aufgabe 2: Zwei Fermionen: Interferenz in der Zweiteilchendetektion

(1.)

$$\begin{aligned}
\langle c_l^\dagger(t)c_l(t)\rangle &= \sum_{j,j'} G(l-j,t)^* G(l-j',t)\langle 0|c_{j_1}c_{j_2}c_j^\dagger c_{j'}c_{j_1}^\dagger c_{j_2}^\dagger|0\rangle \\
&= |G(l-j_1,t)|^2 + |G(l-j_2,t)|^2
\end{aligned}$$

(Rechnung analog zu Blatt 6, Aufgabe 2.)
(2.) Zunächst benutzen wir, dass

$$\langle c_{l_1}^\dagger(t)c_{l_1}(t)c_{l_2}^\dagger(t)c_{l_2}(t)\rangle = \begin{cases} -\langle c_{l_1}^\dagger(t)c_{l_2}^\dagger(t)c_{l_1}(t)c_{l_2}(t)\rangle & (l_1 \neq l_2) \\ \langle c_{l_1}^\dagger(t)c_{l_1}(t)\rangle & (l_1 = l_2) \end{cases}$$

Es folgt sofort, dass für $l_1 = l_2$ kein Interferenzterm auftritt. Für $l_1 \neq l_2$ berechnet man (analog zu Blatt 6, Aufgabe 3):

$$\begin{aligned}
&\langle c_{l_1}^\dagger(t)c_{l_2}^\dagger(t)c_{l_1}(t)c_{l_2}(t)\rangle = \\
&= \sum_{k_1,k_2,k_3,k_4} G(l_1-k_1,t)^*G(l_2-k_2,t)^*G(l_1-k_3,t)G(l_2-k_4,t)\langle 0|c_{j_2}c_{j_1}c_{k_1}^\dagger c_{k_2}^\dagger c_{k_3}c_{k_4}c_{j_1}^\dagger c_{j_2}^\dagger|0\rangle \\
&= \sum_{k_1,k_2,k_3,k_4} G(l_1-k_1,t)^*G(l_2-k_2,t)^*G(l_1-k_3,t)G(l_2-k_4,t)\Big(\delta_{k_1j_1}\delta_{k_2j_2}-\delta_{k_2j_1}\delta_{k_1j_2}\Big)\Big(\delta_{k_4j_1}\delta_{k_3j_2}-\delta_{k_3j_1}\delta_{k_4j_2}\Big) \\
&= -|G(l_1-j_1,t)|^2|G(l_2-j_2,t)|^2-|G(l_1-j_2,t)|^2|G(l_2-j_1,t)|^2+2\mathrm{Re}\Big(G^*(l_1-j_1,t)G^*(l_2-j_2,t)G(l_1-j_2,t)G(l_2-j_1,t)\Big).
\end{aligned}$$