Lösung Blatt 11 - Hausaufgabe

January 12, 2012

Aufgabe 3 Zerfallsrate für einen Zustand eines harmonischen Oszillators

Wir betrachten einen harmonischen Oszillator der Frequenz ω, welcher durch $-\hat{x}\hat{F}$ an eine fluktuierende Kraft $\hat{F}$ gekoppelt ist. Gemäss **Fermi's goldener Regel** erhalten wir die Zerfallsrate $\Gamma_{n-1\leftarrow n}$. Hierbei nehmen wir an, dass das Bad die Temperatur T besitzt. Die Zustände des Bades (ohne Kopplung an den Oszillator) der Energie E_i bezeichnen wir mit $|i\rangle$. Gemäss Fermi's goldener Regel müssen wir alle möglichen Anfangs- sowie Endzustände des Bades mit einbeziehen. Die Anfangszustände gewichten wir hierbei mit dem Boltzmann-Faktor. Wir erhalten ($|n\rangle$ bezeichnet die Eigenzustände des Oszillators)

$$\begin{aligned}
\Gamma_{n-1\leftarrow n} &= \frac{2\pi}{\hbar}\sum_{if} e^{-E_i/k_BT}|\langle f|\langle n-1|\hat{x}\hat{F}|n\rangle|i\rangle|^2\delta(E_i+\hbar\omega-E_f) \\
&= \frac{2\pi}{\hbar}|\langle n-1|\hat{x}|n\rangle|^2\sum_{if} e^{-E_i/k_BT}\langle f|\hat{F}|i\rangle\langle i|\hat{F}|f\rangle\delta(E_i+\hbar\omega-E_f) \\
&= \frac{2\pi}{\hbar^2}|\langle n-1|\hat{x}|n\rangle|^2\int\frac{dt}{2\pi}\,e^{i\omega t}\sum_{if} e^{-E_i/k_BT}\langle i|\hat{F}(t)|f\rangle\langle f|\hat{F}|i\rangle \\
&= \frac{1}{\hbar^2}|\langle n-1|\hat{x}|n\rangle|^2\langle\hat{F}\hat{F}\rangle_\omega^T. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Nun verwenden wir $\hat{x} = x_{\text{ZPF}}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)$ und erhalten

$$\Gamma_{n-1\leftarrow n} = \frac{x_{\text{ZPF}}^2}{\hbar^2}\cdot n\cdot\langle\hat{F}\hat{F}\rangle_\omega^T. \qquad (2)$$

Allgemeiner gilt $\Gamma_{n'\leftarrow n} = 0$ für $n' \neq n\pm 1$, da der Ortsoperator lediglich Zustände mit n und $n\pm 1$ verknüpft. Die Tatsache, dass $\Gamma_{n-1\leftarrow n} \propto n$ ist, ist konsistent mit dem Ergebnis aus der Lindblad Mastergleichung (siehe Aufgabe 2).

Aufgabe 4 Spektrum einer linearen Kette

Das Spektrum der linearen Kette im Grundzustand $|0\rangle$ (in der "rotating wave approximation") ist gegeben durch

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int dt\, e^{i\omega t}\langle \hat{x}_j(t)\hat{x}_j(0)\rangle \\ &\overset{j=0}{=} \frac{x_{\mathrm{ZPF}}^2}{N}\int dt\, e^{i\omega t}\sum_{k,k'}\langle 0|[\hat{b}_k(t)+\hat{b}_k^\dagger(t)][\hat{b}_{k'}+\hat{b}_{k'}^\dagger]|0\rangle \\ &= \frac{x_{\mathrm{ZPF}}^2}{N}\int dt\, e^{i\omega t}\sum_{k,k'}\langle 0|[\hat{b}_k e^{-i\omega_k t}+\hat{b}_k^\dagger e^{i\omega_k t}][\hat{b}_{k'}+\hat{b}_{k'}^\dagger]|0\rangle \\ &= x_{\mathrm{ZPF}}^2\frac{2\pi}{N}\sum_k \delta(\omega-\omega_k). \end{aligned} \tag{3}$$

Im Kontinuumslimes erhalten wir für $\omega_k = \Omega - 2J\cos k$

$$\begin{aligned} S(\omega) &= x_{\mathrm{ZPF}}^2\int_{-\pi}^{\pi} dk\, \delta(\omega-\omega_k) \\ &= \frac{x_{\mathrm{ZPF}}^2}{2J}\int_{-\pi}^{\pi} dk\, \delta(\frac{\omega-\Omega}{2J}+\cos k) \\ &= \frac{x_{\mathrm{ZPF}}^2}{J}\frac{1}{|\sin(\arccos[\frac{\omega-\Omega}{2J}])|} \\ &= \frac{x_{\mathrm{ZPF}}^2}{J}\frac{1}{\sqrt{1-(\omega-\Omega)^2/4J^2}}, \end{aligned} \tag{4}$$

d.h. das Spektrum divergiert für $\omega = \Omega \pm 2J$. Falls ein System an diese Kette via $\hat{x}_j$ ankoppelt, **divergiert** gemäss Aufgabe 3 die **Zerfallsrate** des Systems für resonante Prozesse, d.h. für Prozesse mit Übergangzfrequenzen $\Omega \pm 2J$.

Aufgabe * Weisskopf-Wigner

Wir betrachten ein Niveau $|i\rangle$ mit Energie E, welches an viele weitere Niveaus $|k\rangle$ (mit Energien E_k) gekoppelt ist, so dass $\langle i|\hat{H}|k\rangle = g_k$. Aus der zeitabhängigen Schrödingergleichung erhalten wir das folgende **Gleichungssystem**

$$i\hbar\partial_t \underbrace{\langle i|\psi\rangle}_{\psi_i} = E\langle i|\psi\rangle + \sum_k \langle i|\hat{H}|k\rangle \underbrace{\langle k|\psi\rangle}_{\psi_k} \tag{5}$$

$$i\hbar\partial_t\psi_k = E_k\psi_k + g_k^*\psi_i. \tag{6}$$

Nun führen wir die Laplace Transformierte $\tilde{\psi}(z) \equiv \int_0^\infty dt\, e^{-zt}\psi(t)$ mit $z \in \mathbb{C}$ ein, sowie die dazugehörige Rücktransformation (mit der Konvergenzabzisse s_0)

$$\psi(t) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dz\, e^{zt}\tilde{\psi}(z) \quad \gamma > s_0. \tag{7}$$

Nun verwenden wir die Korrespondenz $\dot{\psi}(t) \to z\tilde{\psi}(z) + \psi(0)$. Damit erhalten wir aus Eqs. (5,10)

$$i\hbar z\tilde{\psi}_i(z) - i\hbar\psi_i(0) \quad = \quad E\tilde{\psi}_i(z) + \sum_k g_k\tilde{\psi}_k(z) \tag{8}$$

$$i\hbar z\tilde{\psi}_k(z) - i\hbar\psi_k(0) \quad = \quad E_k\tilde{\psi}_k(z) + g_k^*\tilde{\psi}_i(z). \tag{9}$$

Dieses System können wir aber formal nach $\tilde{\psi}_i$lösen. Wir erhalten

$$z\tilde{\psi}_i(z) - \psi_i(0) - \frac{E}{i\hbar}\tilde{\psi}_i(z) \quad = \quad \sum_k g_k \frac{i\hbar\psi_k(0) + g_k^*\tilde{\psi}_i(z)}{i\hbar z - E_k} \tag{10}$$

und damit

$$\psi_i(t) \quad = \quad \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dz\, e^{zt}\, \frac{\psi_i(0) + \sum_k g_k \frac{\psi_k(0)}{z+iE_k/\hbar}}{z + iE/\hbar + i\sum_k \frac{|g_k|^2/\hbar}{z+iE_k/\hbar}}. \tag{11}$$