Theorie 3: Vielteilchenphänomene

SS 2011, Studienziel Bachelor, TP-MAT 3

Dozent: F. Marquardt   Übungen: B. Kubala

Übungsblatt 7   Abgabe: 28.06. 2011

Präsenzaufgaben

Aufgabe 14 : Klassische Teilchen, Bosonen und Fermionen

Wir betrachten zwei Teilchen in einem harmonischen Oszillator der Frequenz ω. Die Energiezustände des harmonischen Oszillators seien durch $E_{n_1,n_2} = \hbar\omega(n_1 + n_2)$ gegeben.
a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z_K^{\text{cl.}}$, wenn es sich um klassische, unterscheidbare Teilchen handelt.
b) Handelt es sich bei den Teilchen um identische Bosonen, so können Zustände, die durch eine Vertauschung der beiden Teilchen auseinander hervorgehen, nicht unterschieden werden. Bezeichnet man nun dasjenige der beiden Teilchen, dass sich im höheren Energieniveau befindet, als Teilchen 1, so kann n_2 nur noch bestimmte Werte annehmen, nämlich welche?
Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_K^B für diesen bosonischen Fall.
c) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z_K^F für Fermionen.
d) Zeigen und begründen Sie, dass $Z_K^F < Z_K^B < Z_K^{\text{cl.}}$.
e) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zahl der Teilchen, die sich im niedrigsten Energiezustand E_0 des harmonischen Oszillators befinden für unterscheidbare klassische Teilchen, Bosonen und Fermionen. Betrachten Sie den Fall niedriger Temperatur und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 15 : Bose-Einstein Verteilung in 2 Dimensionen

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass es in drei Dimensionen im Grenzfall tiefer Temperaturen zur Bose-Einstein Kondensation kommt. Wir betrachten nun denselben Grenzfall im zweidimensionalen:
a) Betrachten Sie den Integralausdruck für die Teilchenzahl in zwei Dimensionen. Finden Sie das dimensionslose Integral I_{2D}, so dass

$$N = \frac{L^2}{\lambda_{\text{th}}^2} \cdot I_{2D} \,.$$

(Zwischenergebnis: $I_{2D} = \int_0^\infty \frac{dx}{e^{-\beta\mu}e^x - 1}$.)

Da $\lambda_{\text{th}} \to \infty$ für $T \to 0$ muss I_{2D} ebenfalls divergieren, wenn der gesamte Ausdruck für die Teilchenzahl N endlich bleiben soll. Daher wollen wir zunächst zeigen, dass I_{2D} für $\beta\mu = 0$ tatsächlich divergiert. Schließlich kann man die Temperaturabhängigkeit von μ finden, für die der gesamte Ausdruck für die Teilchenzahl konstant bleibt.

b) Skizzieren Sie den Integranden für kleines (aber endliches) $\beta\mu < 0$. Das Verhalten des Integranden für kleine Werte der Integrationsvariable x finden Sie durch Entwicklung um $x = \beta\mu$.
c) Die Divergenz des Integrals für $\beta\mu \to 0$ wird durch das Verhalten des Integranden für kleine Werte der Integrationsvariable x bestimmt für die obige Entwicklung gültig ist. Leiten Sie aus dieser Überlegung die Abhängigkeit des Integrales von $\beta\mu$ her, indem Sie das Integral am unteren Rand auswerten.
(Zwischenergebnis: $I_{2D} \approx -\ln(-\beta\mu)$.)

d) Wie muss nun μ von der Temperatur abhängen, damit die Teilchenzahl N für $T \to 0$ konstant bleibt? Vergleichen Sie diese Temperaturabhängigkeit von μ mit dem in der Vorlesung behandelten dreidimensionalen Fall und erläutern Sie die Konsequenzen für das Auftreten von Bose-Einstein Kondensation.

Hausaufgaben

Hausaufgabe 12 : Druck der Wärmestrahlung *(5 Punkte)*

Leiten Sie für die Plancksche Wärmstrahlung die Formel für das großkanonische Potential

$$\Phi = -k_B T \ln Z_{gk} = k_B T \int \mathrm{d}E D(E) \ln(1 - e^{-\beta E})$$

ab. Berechnen Sie Φ in drei Dimensionen und daraus den Druck $p = -\partial F/\partial V = -F/V$ der Wärmestrahlung. (Hinweis: Das chemische Potential der Photonen ist 0.)
Bestimmen Sie die Zustandsgleichung $pV = f(E)$.

Hausaufgabe 13 : Bose-Einstein Kondensat in der Magnetfalle *(7 Punkte)*

Bisher wurde die Bose-Einstein Kondensation von freien Teilchen betrachtet, für die periodische Randbedingungen und damit effektiv ein Kastenpotential angenommen wurde. Experimentell sind die Bosonen im parabolischen Potential einer Magnetfalle gefangen. Wir betrachten nun ein solches Einschnürungspotential der Frequenz ω_0 und haben damit Eigenenergien für die Bosonen, die durch

$$\begin{aligned} 1D &: \quad E_{n_x} = \hbar\omega_0 n_x \\ 2D &: \quad E_{n_x,n_y} = \hbar\omega_0(n_x + n_y) \\ 3D &: \quad E_{n_x,n_y,n_z} = \hbar\omega_0(n_x + n_y + n_z)\ , \end{aligned}$$

gegeben sind.
a) Bestimmen Sie zunächst die Zustandsdichten in 1, 2 und 3 Dimensionen in der magnetischen Falle. Finden Sie dazu, z.B. in zwei Dimensionen die Anzahl der Zustände $(n_x,\, n_y)$ mit $E_{n_x,n_y} < E = \hbar\omega_0 n_{\max}$ für $n_{\max} \gg 1$.
b) Finden Sie das Integral für die Anzahl der besetzten Zustände auf und stellen Sie es als Integralausdruck dimensionsloser Größen dar. In welchen Dimensionen findet man Bose-Einstein Kondensation?
Finden Sie die Übergangstemperatur mit Hilfe des Integrals:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{x^k}{e^x - 1} = k!\zeta(k+1)$$

mit der Riemannschen Zetafunktion, für die $\zeta(2) = \pi^2/6\,,\ \zeta(3) \approx 1.202$ gilt.