Lösung Blatt 2 - Präsenzaufgaben

October 26, 2011

Aufgabe 1: Zweiniveausystem

Hamiltonmatrix

Die Hamiltonmatrix H des Zweiniveau-Systems (in der $\{|R\rangle, |L\rangle\}$-Basis) ist gegeben durch

$$H = \begin{bmatrix} E_L & g \\ g & E_R \end{bmatrix} \tag{1}$$

mit $g \in \mathbb{R}$. Der Einfachheit halber betrachten wir nun den Fall $E_R = -E/2$ und $E_L = +E/2$, wobei ferner angenommen wird, dass $E > 0$.

Eigenenergien Die reellen Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ der Hamiltonmatrix erfüllen $\det(H - \lambda_{1,2} I) = 0$ (wobei I die Einheitsmatrix bezeichnet) und damit (siehe Fig. 1)

$$\begin{aligned} (\lambda_{1,2} - \frac{E}{2})(\lambda_{1,2} + \frac{E}{2}) &= g^2 \\ \lambda_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{E^2}{4} + g^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Nun können wir die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ mit den Eigenenergien $E_\pm = \pm\sqrt{\frac{E^2}{4} + g^2}$ identifizieren. Damit erhalten wir $E_+(g \to 0) = E_L$ und $E_-(g \to 0) = E_R$. Wir beobachten, dass sich die Eigenenergien mit zunehmender Kopplung g **abstossen** ("Level repulsion"), da für $g > 0$ gilt, $E_+ \geq E_L$ sowie $E_- \leq E_R$.

Eigenzustände

Für die korrespondierenden Eigenzustände $|\pm\rangle$ muss dann natürlich gelten:

$$(\hat{H} - \hat{I} E_\pm)|\pm\rangle = 0.$$

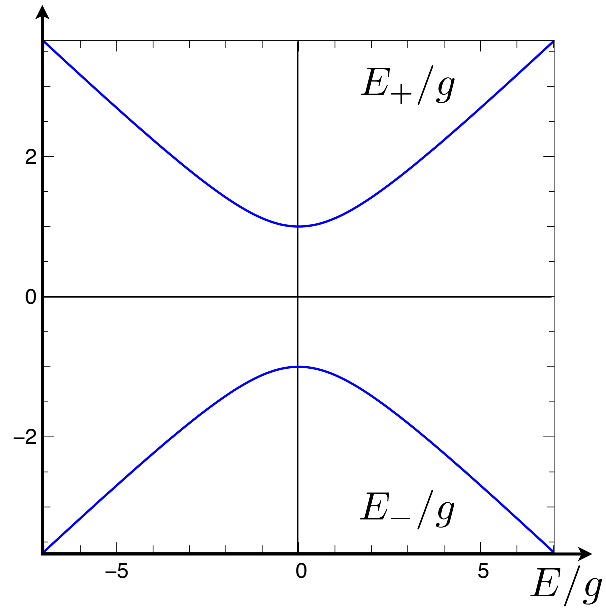

Figure 1: Plot der Eigenenergien des Zweiniveausystems als Funktion der Energiedifferenz der ungekoppelten Niveaus.

Hierbei stellt $\hat{H}$ den Hamiltonoperator des Systems und $\hat{I}$ die Identität dar, d.h., $\hat{I} = |R\rangle\langle R| + |L\rangle\langle L|$. Diese Operatorgleichungen können wir nun in der $\{|L\rangle, |R\rangle\}$-Basis darstellen. Wir erhalten

$$\begin{bmatrix} E_L - E_\pm & g \\ g & E_R - E_\pm \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle L|\pm\rangle \\ \langle R|\pm\rangle \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} 0. \tag{3}$$

Hieraus folgt

$$\langle L|\pm\rangle = \frac{g}{(E_\pm - E_L)} \langle R|\pm\rangle. \tag{4}$$

Fordern wir schliesslich die **Normierung** der Eigenzustände $|\langle \pm|\pm\rangle|^2 = 1$, erhalten wir

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{g^2}{(E_\pm - E/2)^2}}} \left[\frac{g}{E_\pm - E/2} |L\rangle + |R\rangle \right]. \tag{5}$$

Kleine Störung $E \gg g$ In diesem Limes gilt $E_\pm \simeq \pm\frac{E}{2} \pm \frac{g^2}{E}$. Damit ergibt sich wie erwartet aus Eq.(5) für die Eigenzustände

$$\begin{aligned} \lim_{g/E\to 0} |+\rangle &= |L\rangle \\ \lim_{g/E\to 0} |-\rangle &= |R\rangle. \end{aligned} \tag{6}$$

Starke Störung $E \ll g$ Für starke Störungen ist $E_\pm \simeq \pm g$. Daraus folgt aber

$$\begin{aligned} \lim_{E/g\to 0} |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|R\rangle + |L\rangle\right] \\ \lim_{E/g\to 0} |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|R\rangle - |L\rangle\right] \end{aligned} \tag{7}$$

Aufgabe 2: Heisenbergsche Unschärferelation

Siehe Vorlesung.