Theorie 3: Vielteilchenphänomene

SS 2011, Studienziel Bachelor, TP-MAT 3

Dozent: F. Marquardt   Übungen: B. Kubala

Übungsblatt 3 Abgabe: 31.05. 2011

Präsenzaufgaben

Aufgabe 6 : Entropie der Wärmestrahlung

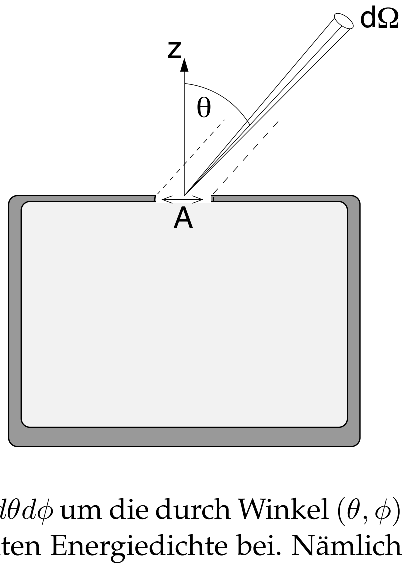
Die Entropie eines harmonischen Oszillators

$$S^{H.O.} = \frac{\hbar\omega}{T}\langle n\rangle - k_B \ln\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right)$$

wurde in der Vorlesung berechnet. Geben Sie analog zu den Berechnungen in der Vorlesung einen Integralausdruck für die Gesamtentropie eines Wärmestrahlungsfeldes in drei Raumdimensionen an, wobei Sie $D(\omega) \propto \omega^2$ annehmen können.
Das Integral kann (mit partieller Integration) auf das Integral für die Gesamtenergie des Wärmestrahlungsfeldes zurückgeführt werden. Berechnen Sie damit das Verhältnis $S/\delta E$ für die Wärmestrahlung.

Aufgabe 7 : Emission von Wärmestrahlung

In der Vorlesung haben wir die Gesamtenergie und die Energiedichte, $\varepsilon = \frac{\delta E}{V} = 4\frac{\sigma}{c}T^4$ des elektromagnetischen Feldes in einem Hohlraum eines Körpers der Temperatur T berechnet, wobei σ als Stefan-Boltzmann Konstante bezeichnet wird. Wir wollen nun die Wärmestrahlung, die ein solcher Körper emittiert bestimmen.
Machen Sie sich zunächst klar, dass die abgestrahlte Leistung die Dimension von (dieselbe Einheit wie) Energiedichte·Fläche·Geschwindigkeit hat.
Man betrachte nun eine kleine Öffnung der Fläche A, die den Hohlraum mit der Außenwelt verbindet. Für die Strahlung in einer Richtung, die nicht senkrecht zur Öffnung steht, ist die Größe A_{eff} der Öffnung effektiv vermindert.



Zu der Wärmestrahlung in ein Raumwinkelelement $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ um die durch Winkel (θ, ϕ) definierte Richtung (siehe Skizze) trägt nur ein Teil der gesamten Energiedichte bei. Nämlich der Bruchteil, $d\varepsilon = \varepsilon d\Omega/(4\pi)$, der von den Photonen stammt, die sich in passender Richtung bewegen. Die in das Raumwinkelement $d\Omega$ abgestrahlte Leistung dP ist dann durch $dP = c\, A_{\text{eff}}\, d\varepsilon$ gegeben.
Finden Sie aus diesen Überlegungen die abgestrahlte Gesamtleistung, indem Sie über das Raumwinkelelement integrieren (nutzen Sie die Skizze, um zu erkennen, über welchen Winkelbereich sich die Integration erstreckt).

Hausaufgaben

Hausaufgabe 5: 2-Dimensionaler Harmonischer Oszillator *(6 Punkte)*

Die Energiezustände eines harmonischen Oszillators in zwei Dimensionen $x,\ y$ sind durch

$$E(n_x,\ n_y) = \hbar\omega(n_x + n_y) = \hbar\omega m$$

gegeben.
a) Geben Sie für die möglichen Energien E_m mit $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ die Entartung g_m an. Berechnen Sie die Zustandssumme durch Summation über die Energien E_m.
b) Einfacher kann die Zustandssumme durch Summation über die durch $(n_x,\ n_y)$ charakterisierten Zustände berechnet werden. Zeigen Sie, dass die Zustandssumme faktorisiert und berechnen Sie sie.
c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie und skizzieren Sie sie in Abhängigkeit von der Temperatur.

Hausaufgabe 6: Plancksche Strahlung *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie die von der Sonne durch Wärmestrahlung ausgesendete Gesamtleistung. Der Sonnenradius beträgt $R_S = 7 \cdot 10^8$m, die Oberflächentemperatur der Sonne 5800K.
b) Die Erde reflektiert 30% der Sonnenstrahlung direkt, der Rest wird absorbiert und als Wärmestrahlung reemittiert. Berechnen Sie die Temperatur der Erde aus dem Gleichgewicht zwischen absorbierter und emittierter Strahlung. Der Abstand der Erde zur Sonne beträgt 8 Lichtminuten.
c) Betrachten Sie das Universum als dreidimensionalen Hohlraum mit Radius 10^{26}m und der gleichmäßigen Temperatur von 3K (Mikrowellenhintergrundstrahlung). Berechnen Sie die Gesamtenergie der Hintergrundstrahlung und schätzen Sie die Gesamtzahl der Photonen in dieser Strahlung ab.