Theorie 3: Vielteilchenphänomene

SS 2011, Studienziel Bachelor, TP-MAT 3

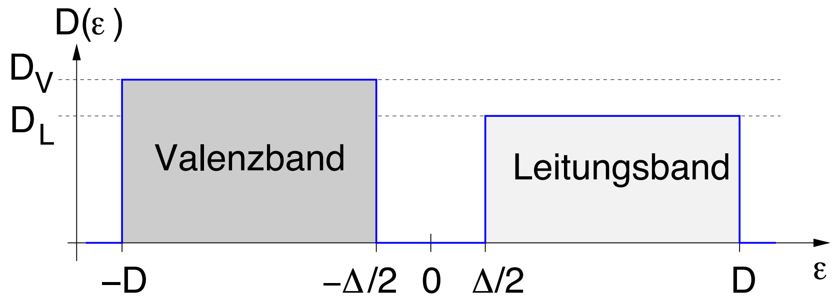
Dozent: F. Marquardt   Übungen: B. Kubala

Übungsblatt 5   Abgabe: 14.06. 2011

Präsenzaufgaben

Aufgabe 10 : Chemisches Potential in Halbleitern

Die Zustandsdichte eines (zweidimensionalen) Halbleiters mit Valenz- und Leitungsband kann wie unten skizziert angenommen werden. Das chemische Potential befindet sich bei $T = 0$ in der Mitte der Bandlücke.



Wie ändert sich das chemische Potential, wenn die Temperatur erhöht wird? Skizzieren Sie zunächst die energieaufgelösten Ladungsträgerdichten, $D_{V/L}f(\varepsilon)$, in Valenz- und Leitungsband und finden Sie die Temperaturabhängigkeit von μ für kleine Temperaturen, $k_BT \ll \Delta$ in Abhängigkeit von D_V und D_C (Die Bandweite D ist dabei viel größer als die Bandlücke Δ).

Aufgabe 11 : Chemisches Potential für ein 2-D Fermigas

a) Zeigen Sie, dass spinlose, freie (nichtrelativistische) Elektronen der Masse m in zwei Dimensionen (x, y) eine konstante Zustandsdichte $D(E) = D_0$ haben und bestimmen Sie die Konstante D_0. Gehen Sie dazu von periodischen Randbedingungen in einem System der Größe $L \times L$ aus.
b) Berechnen Sie für Fermionen mit chemischem Potential μ für obige Zustandsdichte die mittlere Teilchenzahl $\bar{N}$ als Funktion von Temperatur T und μ.

Hinweis:

$$\int \mathrm{d}z \frac{1}{e^z + 1} = -\ln\left(1 + e^{-z}\right)$$

c) Bestimmen Sie aus der Bedingung, $\bar{N}(T) = \bar{N}(T = 0) =$ konst. , die Abhängigkeit des chemische Potential μ von Temperatur und Fermienergie, $E_F = \mu(T = 0)$.
d) Für welche Temperatur wird $\mu = 0$?
Skizzieren Sie $\mu(T)$ und diskutieren Sie die Grenzfälle $k_BT \ll E_F$ und $k_BT \gg E_F$.

Hausaufgaben

Hausaufgabe 8 : Fermionische Besetzung *(5 Punkte)*

Geben Sie einen Ausdruck für die Besetzung $n = N/V$ eines elektronischen Bandes mit Zustandsdichte

$$\frac{D(\varepsilon)}{V} = \begin{cases} 0 & : \quad \varepsilon < 0 \\ D_0 = \text{konst.} & : \quad \varepsilon > 0 \end{cases}$$

durch Fermionen an und werten Sie den Ausdruck für $T = 0$ in Abhängigkeit vom chemischen Potential μ aus. Skizzieren Sie $n(\mu)$ für $T = 0$ und für endliche Temperatur.
Betrachten Sie wie in Aufgabe 10 Valenz- und Leitungsband in einem Halbleiter. Skizzieren Sie $n(\mu)$ für die entsprechende Zustandsdichte und diskutieren Sie wiederum die in Aufgabe 10 gefundene Temperaturabhängigkeit des chemischen Potentials.

Hausaufgabe 9 : Graphen *(7 Punkte)*

a) Zeigen Sie, dass freie Teilchen in zwei Dimensionen, (x, y), mit der Dispersionsrelation

$$E = \hbar v|\vec{k}| = \hbar v\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

die Zustandsdichte $D(E) = D_0 \cdot E$ für $E \geq 0$ haben und bestimmen Sie die Konstante D_0. Gehen Sie dazu von periodischen Randbedingungen in einem System der Größe $L \times L$ aus.
b) Berechnen Sie für Fermionen mit chemischem Potential $\mu(T) \equiv 0$ für obige Zustandsdichte die Temperaturabhängigkeit von mittlerer Teilchenzahl $\langle N \rangle$ und dem Erwartungswert der Energie $\langle E \rangle$.
(Hinweis: Numerische Vorfaktoren, die aus der expliziten Berechnung auftretender dimensionsloser Integrale stammen, müssen Sie nicht bestimmen.)

Wir betrachten im weiteren Fermionen mit einer Zustandsdichte der Form

$$D(E) = \begin{cases} D_0\,|E| & : \quad -E_c \leq E \leq +E_c \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases} .$$

Dies ist ein grobes Modell für die Zustandsdichte von Graphen (Nobelpreis 2010).
Nehmen Sie an, dass das chemische Potential bei Temperatur $T = 0$ in der Mitte des fermionischen Bandes bei $\mu = 0$ liegt.
c) Beweisen Sie, dass für diese Zustandsdichte die mittlere Teilchenzahl $\langle N \rangle$ für $\mu(T) \equiv 0$ temperaturunabhängig ist.
d) Skizzieren Sie die Besetzung $n(E) = f(E) \cdot D(E)$ (wobei $f(E)$ die Fermifunktion bezeichnet) für $T = 0$, $k_B T \ll E_c$ und $k_B T \gg E_c$.