Lösung Probeklausur

January 31, 2012

Aufgabe 1 Gequetscher Zustand

a) Der Hamiltonoperator $\hat{H}$ des Oszillators mit der Frequenz ω ist gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}. \tag{1}$$

Aus der Heisenberg-Gleichung $\frac{d}{dt}\hat{A} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{H}]$ erhalten wir die Bewegungsgleichungen für $\hat{x}$ und $\hat{p}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{x} &= \frac{1}{i\hbar}[\hat{x}, \frac{\hat{p}^2}{2m}] \\ &= \frac{\hat{p}}{m} \end{aligned} \tag{2}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{p} &= \frac{1}{i\hbar}[\hat{p}, \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}] \\ &= -m\omega^2\hat{x}. \end{aligned} \tag{3}$$

b) Daraus folgt natürlich $\frac{d^2}{dt^2}\hat{x} = -\omega^2\hat{x}$. Diese Gleichung wird natürlich durch den Ansatz $\hat{x} = \hat{A}\cos\omega t + \hat{B}\sin\omega t$ gelöst. Ferner gilt

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(0)\cos\omega t + \frac{\hat{p}(0)}{m\omega}\sin\omega t. \tag{4}$$

c) Nun finden wir leicht die zeitabhängige Varianz $\langle\hat{x}^2(t)\rangle$, welche gegeben ist durch

$$\langle\hat{x}^2(t)\rangle = \langle\hat{x}^2(0)\rangle\cos^2(\omega t) + \frac{\langle\hat{p}^2(0)\rangle}{m^2\omega^2}\sin^2(\omega t) + \frac{\langle\{\hat{x}(0), \hat{p}(0)\}\rangle}{m\omega}\sin\omega t\cos\omega t. \tag{5}$$

d) Ist nun $\langle\{\hat{x}(0), \hat{p}(0)\}\rangle = 0$, dann ist die Varianz zeitunabhängig falls $\frac{\langle\hat{p}^2(0)\rangle}{m^2\omega^2} = \langle\hat{x}^2(0)\rangle$. [SKIZZE]

e) Schliesslich können wir noch die Wellenfunktion$\psi(x,t)$ skizzieren. Hierfür verwenden wir natürlich, dass für den harmonischen Oszillator ein Gausszustand ein Gausszustand bleibt. Lediglich die Varianz verändert sich gemäss Eq. (5), so dass

$$\psi(x,t) \quad = \quad \frac{1}{(2\pi\langle\hat{x}(t)^2\rangle)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{4\langle\hat{x}(t)^2\rangle}}. \tag{6}$$

[SKIZZE]

Aufgabe 2 Fermionen auf dem 1D Gitter

a) Durch direktes Einsetzen von $\hat{a}_l = \sum_k \frac{e^{ikl}}{\sqrt{N}}\hat{b}_k$ in den Hamiltonian, erhalten wir ($k = \frac{2\pi n}{N}$ mit $n \in [-N/2, N/2-1]$ für gerade N)

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \varepsilon \sum_{k_1 k_2} \hat{b}^\dagger_{k_1}\hat{b}_{k_2} \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} e^{i(k_2-k_1)l}}_{\delta_{k_1,k_2}} - J \sum_{k_1 k_2} \hat{b}^\dagger_{k_1}\hat{b}_{k_2} e^{-ik_1} \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} e^{i(k_2-k_1)l} + \text{h.c.} \\
&= \sum_k (\varepsilon - 2J\cos k)\hat{b}^\dagger_k \hat{b}_k. \qquad (7)
\end{aligned}$$

b) Wir können schliesslich checken, dass auch die Operatoren $\hat{b}_k$ die fermionische Antikommutator-Relation erfüllen. Unter der Annahme, dass $\{\hat{b}_{k_1}, \hat{b}^\dagger_{k_2}\} = \delta_{k_1 k_2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\{\hat{a}_l, \hat{a}^\dagger_m\} &= \frac{1}{N}\sum_{k_1 k_2} e^{ik_1 l - ik_2 m}\{\hat{b}_{k_1}, \hat{b}^\dagger_{k_2}\} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k_1 k_2} e^{ik_1 l - ik_2 m}\delta_{k_1 k_2} \\
&= \delta_{l,m}, \qquad (8)
\end{aligned}$$

was natürlich konsistent ist mit $\{\hat{a}_l, \hat{a}^\dagger_m\} = \delta_{l,m}$.

Aufgabe 3 Hubbard-Modell mit zwei Plätzen

Der Hamiltonian des Hubbard-Modells mit zwei Plätzen und zwei Bosonen ist gegeben durch (dargestellt in der $\{|2,0\rangle, |1,1\rangle, |0,2\rangle\}$ Basis)

$$\hat{H} \quad = \quad \begin{bmatrix} U & -\sqrt{2}J & 0 \\ -\sqrt{2}J & 0 & -\sqrt{2}J \\ 0 & -\sqrt{2}J & U \end{bmatrix}. \tag{9}$$

a) Es ist nun leicht zu sehen, dass $[1, 0, -1]/\sqrt{2}$ ein Eigenvektor mit der Energie U ist.

b) Die anderen beiden Eigenvektoren müssen orthogonal zu $[1, 0, -1]/\sqrt{2}$ sein. Diese Bedingung ist erfüllt für $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}[1, \beta, 1]$, da

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ 1 \end{bmatrix} = 0. \tag{10}$$

c) Nun setzen wir den Ansatz aus b) in die zeitunabhängige Schrödingergleichung ein

$$E \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & -\sqrt{2}J & 0 \\ -\sqrt{2}J & 0 & -\sqrt{2}J \\ 0 & -\sqrt{2}J & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ 1 \end{bmatrix}$$

und erhalten daraus die Bedingungen

$$\begin{aligned} E &= U - \sqrt{2}J\beta \\ \beta E &= -2\sqrt{2}J \end{aligned}$$

und damit

$$E^2 - UE - 4J^2 = 0$$

d) Damit können wir nun leich die verbleibenden Eigenenergien bestimmen $E_{2,3} = \frac{U}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{U^2 + 16J^2}$.
[SKIZZE]

Aufgabe 4 Bose-Einstein Kondensat

a) Durch direktes Einsetzen erhalten wir

$$\langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \rangle. \tag{11}$$

b) Wir betrachten zunächst Fall (i). In diesem Fall formten die Atome vor dem Ausschalten des Gitters ein **BEC**. Der Grundzustand $|0\rangle$ ist in diesem Fall (wir nehmen der Einfachheit halber an, dass die Anzahl der Atome $M = N$) gegeben durch

$$|0\rangle \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{N!}} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \hat{a}_j^\dagger \right)^N}_{=(\hat{b}^\dagger)^N} |\text{vac}\rangle. \tag{12}$$

Demnach ist in diesem Fall

$$\lim_{N\to\infty} \langle 0|\hat{b}^\dagger \hat{b}|0\rangle / N^s \quad = \quad \begin{cases} \infty & , s = 0 \\ 1 & , s = 1 \end{cases} . \tag{13}$$

Im Fall (ii) liegt eine **thermische** Wolke mit **hoher** Temperatur vor. Betrachten wir nun $\langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle$ dargestellt durch die Einteilchendichtematrix:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \rangle + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\neq i} \langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \rangle \quad \simeq \quad 1 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\neq i} \langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \rangle. \tag{14}$$

Nun ist der entscheidende Punkte, dass die thermische Korrelationsfunktion $\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \rangle$ mit zunehmenden $|i - j|$ **exponentiell** abfällt und somit $\sum_{j\neq i} \langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \rangle \to \text{const.}$ für $N \to \infty$. Somit finden wir

$$\lim_{N\to\infty} \langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle / N^s \quad = \quad \begin{cases} \text{const.} & , s = 0 \\ 0 & , s = 1 \end{cases} . \tag{15}$$