Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik II

Exercises for the course Quantum mechanics II

Wintersemester 2011/12, Universität Erlangen-Nürnberg, Dozent: Prof. Florian Marquardt

Winter term 2011/12, University Erlangen-Nürnberg, Prof. Florian Marquardt

Blatt 1 - Abgabetermin: Mittwoch, 26.10.2011, in der Vorlesung

Sheet 1 - Deadline: Wednesday, 26.10.2011, during the class

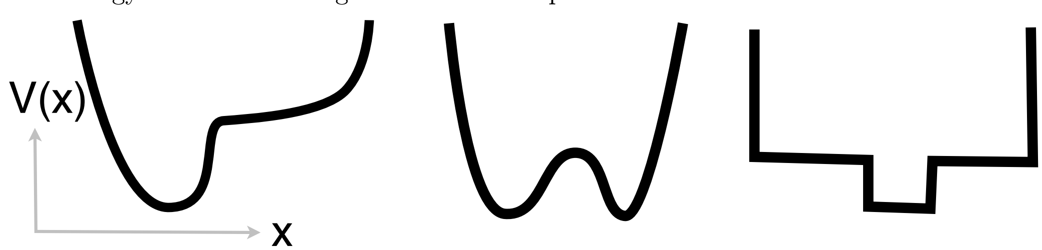
Präsenzübungen (Exercises during the tutorial)

Allgemeiner Hinweis: Fertigen Sie so oft wie möglich saubere Skizzen an, in denen auch wesentliche Längen, Frequenzen, Periodizitäten etc. vermerkt sind. Überlegen Sie sich selbst weitergehende Fragestellungen.

General tip: Draw as often as possible sketches which include also the essential length, frequencies, periods etc. Think of further relevant questions.

1. Denken Sie sich gemeinsam ein paar eindimensionale Potentiale $V(x)$ aus, welche gebundene Energie-Eigenzustände haben sollten (darunter auch welche, die so ähnlich aussehen, wie die unten angegebenen). Überlegen Sie sich dann, wie die Energieniveaus und die Eigenzustände in diesen Potentialen ungefähr aussehen werden.

1. Come up with a couple of examples of one dimensional potentials $V(x)$, whose energy eigenstates are bound (in particular those which look similar to the sketches below). Draw a qualitative picture of the energy levels and the eigenstates of these potentials.



2. Betrachten Sie ein Interferenzexperiment, bei welchem zwei Wellenpakete durcheinander fliegen. Die Wellenfunktion sei in guter Näherung (Vernachlässigung des Zerfließens) gegeben durch

$$\Psi(\vec{r},t) = \sum_{j=1,2} \phi(\vec{r} - \vec{v}_j t - \vec{R}_j) e^{i(\vec{k}_j \vec{r} - \omega_j t)}$$

Hierbei ist $\phi(\vec{r})$ eine reelle, glatt abfallende Funktion (z.B. eine Gaußglocke), mit einer Ausdehnung viel größer als $\lambda_j = 2\pi/|\vec{k}_j|$. Wie hängen ω_j und $\vec{v}_j$ von $\vec{k}_j$ ab? Diskutieren Sie nun möglichst allgemein, wie das Interferenzmuster aussehen wird, wenn sich die Wellenpakete zu einer gewissen Zeit wenigstens teilweise überlappen, d.h. diskutieren Sie $|\Psi(\vec{r},t)|^2$. Spezialisieren Sie nun auf eine 2D Situation, mit $\vec{k}_j = (k_x, \pm k_y)$, wobei $\pm$ für $j = 1,2$ gilt (und $\vec{R}_j = \vec{0}$). Zeichnen und diskutieren Sie dort $|\Psi(\vec{r},t)|^2$ explizit für die drei Situationen: (i) bevor die Wellenpakete sich treffen und während sie (ii) teilweisen und (iii) völligen Überlapp haben. Was ändert sich, wenn eines der Wellenpakete relativ zum anderen abgeschwächt wird (also nun: $\lambda_j \phi(\vec{r} - \vec{v}_j t) \ldots$ mit verschiedenen λ_j in Ψ)?

2. Consider an interference experiment in which two wave-packets cross each other. In a good approximation (neglecting dispersion), the wavefunction is given by

$$\Psi(\vec{r},t) = \sum_{j=1,2} \phi(\vec{r} - \vec{v}_j t - \vec{R}_j) e^{i(\vec{k}_j \vec{r} - \omega_j t)}$$

Here $\phi(\vec{r})$ is a real, smooth function (e. g. a gaussian function) which decays on a length scale much larger than $\lambda_j = 2\pi/|\vec{k}_j|$. How do ω_j and $\vec{v}_j$ depend on $\vec{k}_j$? In the general case, discuss how the interference pattern look like when the wavepackets overlap at least partially at a certain instant of time, in other words discuss $|\Psi(\vec{r},t)|^2$. Consider the special case of wave-packets in 2D with $\vec{k}_j = (k_x, \pm k_y)$, where $\pm$ applies to $j = 1, 2$ (and $\vec{R}_j = \vec{0}$). Draw and discuss $|\Psi(\vec{r},t)|^2$ for three situations: (i) before the wave-packets cross, and when they overlap (ii) partially and (iii) completely. What changes if a wave-packet is attenuated compared to the other (that is: $\lambda_j \phi(\vec{r} - \vec{v}_j t) \ldots$ with different λ_j in Ψ)?

3. In einem Doppelmuldenpotential konzentrieren wir uns auf die zwei Zustände $|L\rangle$ und $|R\rangle$, in der linken bzw. rechten Mulde, und nehmen diese als Basis. Für ein symmetrisches Potential, mit $V(x) = V(-x)$: wie sehen der Grundzustand und der erste angeregte Zustand aus, ausgedrückt in diesen beiden Basiszuständen und passend normiert? Setzen wir nun die Energie des Grundzustandes der Einfachheit halber als Null (warum dürfen wir das?) und die Energie des angeregten Zustandes sei $E = \hbar\omega$ (wie hängt E im allgemeinen von der Breite der Potentialbarriere zwischen den beiden Mulden ab? Mit welcher Methode könnte man E genauer annähern?). Wir starten mit einem Teilchen in der rechten Mulde:

$$|\Psi(t=0)\rangle = |R\rangle$$

Berechnen, skizzieren und diskutieren Sie die Wahrscheinlichkeit, später (zur Zeit t) bei einer Messung das Teilchen in der linken Mulde zu finden.

3. In a double-well potential, we choose as a basis the states $|L\rangle$ und $|R\rangle$ in the left and right well, respectively. For a symmetric potential such that $V(x) = V(-x)$: how are the groundstate and first excited state expressed in terms of the basis states with the appropriate normalization? For simplicity we set the energy of the groundstate to zero (why are we allowed to do so?), the energy of the first excited is $E = \hbar\omega$ (how does the energy E depend on the width of the barrier between the two wells in the general case? Which method allows to estimate E more precisely). We start with a particle in the right well:

$$|\Psi(t=0)\rangle = |R\rangle$$

Calculate, sketch and discuss the probability of detecting the particle in the left well at a later time t.

Hausaufgabe (homework)

Für den Anfang nur eine Hausaufgabe:

4. Betrachten Sie ein Teilchen im freien Raum (Masse m). Am Anfang sei es in einem Gauß-Zustand

$$\Psi(x, t=0) = \mathcal{N} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}$$

Berechnen Sie zuerst die Normierungskonstante $\mathcal{N}$. Berechnen Sie dann die Zeitentwicklung gemäß der zeitabhängigen Schrödingergleichung. Hinweis: Der Ansatz $\Psi(x,t) = \mathcal{N} \exp[-\frac{x^2}{a(t)} - b(t)]$ wird gute Dienste leisten... Skizzieren Sie dann die Dichte $|\Psi(x,t)|^2$ als Funktion von x (zu verschiedenen

Zeiten), und ebenso $\mathrm{Re}\Psi(x,t)$. Finden Sie die physikalische Interpretation der Tatsache, dass in der Skizze von $\mathrm{Re}\Psi$ weiter außen die Wellenlänge kleiner wird!

As a start only one homework:

4. Consider a particle in free space (mass m) in an initial gaussian state

$$\Psi(x,t=0)=\mathcal{N}e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}.$$

Calculate the normalization constant $\mathcal{N}$. Calculate the time evolution using the time-dependent Schrödinger equation. Tip: use the ansatz $\Psi(x,t)=\mathcal{N}\exp[-\frac{x^2}{a(t)}-b(t)]$. Sketch the probability density $|\Psi(x,t)|^2$ as a function of x (for different times), do the same for $\mathrm{Re}\Psi(x,t)$. Find the physical explanation why in the sketch of $\mathrm{Re}\Psi$ for long distances the wavelength becomes small!