Statistische Physik und Thermodynamik

WS 2010/2011, Studienziel Bachelor, TP-4

Dozent: F. Marquardt   Übungen: B. Kubala

Übungsblatt 2 Abgabe: 04.11 2010

Präsenzaufgaben

Aufgabe 6 : Cauchy-Verteilung

Ein Laser sei am Punkt $x = -1$ befestigt und zeige in einem zufälligen Winkel $-\pi/2 \le \alpha \le \pi/2$ nach rechts. Alle zulässigen Winkel sind dabei gleich wahrscheinlich.
a) Für einen bestimmten Ausrichtungswinkel α des Lasers wird ein Schirm entlang der y-Achse im Punkt y vom Laserlicht getroffen. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho(y)$ an. Überlegen Sie sich dazu, wie man im Allgemeinen die Variable der Wahrscheinlichkeitsverteilungen wechselt und wann Probleme mit dieser einfachen Methode auftreten können.
b) Was sind die Momente $\langle y^n \rangle\,, \quad n \in \mathbb{N}_0$?
c) Betrachten Sie eine Funktion $\rho(x)\,,\ \ x > 0$, die für große $|x|$ algebraisch abfällt, $\rho(x) \sim |x|^{-k}$ für $|x| \to \infty$. Welche Bedingungen muss k erfüllen, damit $\rho(x)$ normierbar ist? Welche, damit das n-te Moment existiert?

Aufgabe 7 : Zustandsdichte

Für ein einzelnes System sei die Zustandsdichte $D_1(\epsilon) = C(\epsilon/\epsilon_0)^\alpha$. Berechnen Sie die Zustandsdichte für ein Gesamtsystem, zusammengesetzt aus N unabhängigen solcher Teilsysteme. Gehen Sie dabei sukzessive vor, d.h. kombinieren Sie erst zwei Systeme, dann dazu ein drittes, etc. Verwenden Sie die in der Vorlesung gezeigte Formel

$$D_{1+2}(\epsilon) = \int d\epsilon' D_1(\epsilon') D_2(\epsilon - \epsilon')\,.$$

(Hinweis: Wir interessieren uns dabei für die funktionelle Abhängigkeit, $D(\epsilon) = \text{const.} \cdot d(\epsilon)$; numerische Vorfaktoren sollen nicht berechnet werden.)
Bemerkung: Die numerischen Integrale könnten mit Hilfe der Gammafunktion ausgedrückt werden, siehe z.B. Bronstein 21.6.4, und man kann so einen geschlossenen Ausdruck für $D_{1+2+\ldots+N}(\epsilon)$ finden.

Hausaufgaben

Hausaufgabe 3 : Variablentransformation in Wahrscheinlichkeitsdichten *(2 Punkte)*

Betrachten Sie wieder die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung für den Betrag der Geschwindigkeit, $\rho(v) = cv^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}$.
Bestimmen Sie nach der Methode in Aufgabe 6 die entsprechende Verteilung für die kinetische Energie, $\rho(E_{\text{kin}})$. Geben Sie Ausdrücke für die Berechnung von $\langle E_{\text{kin}} \rangle$ mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\rho(v)$ und mit Hilfe von $\rho(E_{\text{kin}})$ an.

Hausaufgabe 4 : Enartung und freie Energie *(5 Punkte)*

Ein System bestehe aus N Zuständen mit Energie $\epsilon_0 = 0$ und M Zuständen der Energie $\epsilon_1 > 0$.
a) Bestimmen Sie Zustandssumme und freie Energie des Systems.
b) Bestimmen Sie die Entropie des Systems und diskutieren Sie den Grenzfall verschwindender und den Fall großer Temperatur. Skizzieren Sie $S(T)$.
Betrachten Sie im folgenden $N = 1$.
c) Berechnen Sie die mittlere Energie $E = \langle H \rangle$ des Systems und skizzieren Sie ihre Temperaturabhängigkeit für $M = 1$ und $M \gg 1$.

Hausaufgabe 5 : 2-Niveausysteme *(5 Punkte)*

Wir betrachten N identische, unabhängige 2-Niveausysteme mit Energien ϵ_0 and $\epsilon_1 = \epsilon_0 + \Delta\,,\ \Delta \geq 0$.
a) Welche möglichen Energiewerte E_n kann das Gesamtsystem annehmen? Bestimmen Sie jeweils die Anzahl verschiedener Zustände, die Energie E_n. haben. Geben sie damit die Zustandsumme Z_N des Gesamtsystemes an.
b) Die Zustandssumme kann auch anders gefunden werden. Zeigen Sie sich dazu, dass Z_N faktorisiert und durch die Zustandssumme eines einzelnen 2-Niveausystems Z_1 ausgedrückt werden kann.
b) Bestimmen Sie die freie Energie F, die mittlere Energie $E = \langle H \rangle$ und die Entropie $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$. Welchen Wert hat die Entropie bei $T = 0$ für $\Delta = 0$ und für $\Delta > 0$.
c) Für eine binomialverteilte Größe m haben wir in Aufgabe 3 gefunden, dass $\sigma^2 = \langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2 = Mp(1-p)$. Finden Sie damit $\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2$.
d) Berechnen Sie die spezifische Wärme $C_V = \frac{\partial E}{\partial T}$. Überprüfen Sie den allgemeinen Zusammenhang zwischen C_V und $\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2$.