Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg

WS 2012/2013

Institut für Theoretische Physik II
Prof. Dr. F. Heidrich-Meisner
Sprechstunde: Do. 9-11 Uhr, Raum 02.782.
E-mail: heidrich-meisner@lmu.de

5. Übungsblatt Many-body physics with ultra-cold atomic gases

14.11.2012
Besprechung: MIttwoch, 21.11.2012

5.1: Zweite Quantisierung

(a) Leiten Sie die folgenden Kommutatorrelationen für Bosonen und Fermionen her:

$$[c_i, c_j^\dagger]_+ = \delta_{ij} \quad [a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}.$$

Verwenden Sie die in der Vorlesung angegebene Definition der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren.

(b) Betrachten Sie Bosonen. $a_\mu^\dagger$ erzeuge ein Teilchen in einem Einteilchenzustand $|\mu\rangle$. Berechnen Sie die Norm des Zustandes $(a_1^\dagger)^2 a_2^\dagger|0\rangle$. Verallgemeinern Sie dieses Ergebnis auf einen allgmeinen Zustand

$$(a_1^\dagger)^{n_1} \dots (a_\mu^\dagger)^{n_\mu} \dots |0\rangle\,.$$

5.2: Dispersionsrelation

a. Wir betrachten spinlose Fermionen, die auf einer eindimensionalen Kette der Länge L definiert sind. Wir verwenden periodische Randbedingungen, der Hamiltonoperator ist:

$$H = -t\sum_{i=1}^{N}(c_{i+1}^\dagger c_i + h.c.) - t'\sum_{i=1}^{N}(c_{i+2}^\dagger c_i + h.c.).$$

Bestimmen Sie die Dispersionsrelation ϵ_k, indem Sie den Hamiltonoperator mittels einer Fouriertransformation in die diagonale Form $H = \sum_k \epsilon_k c_k^\dagger c_k$ bringen. $c_i^\dagger$ erzeugt ein Fermion am Platz i. $h.c.$ steht für Hermitesch konjugiert. Die Kette hat N Plätze und $L = Na$, wobei wir die Gitterkonstante auf eins setzen, $a = 1$.

b. Skizzieren Sie die Dispersionsrelation für (i) $t = 1, t' = 2$, (ii) $t = 1, t' = -2$, (iii) $t = 1, t' = 1/5$ und beschreiben Sie das qualitative Verhalten, indem Sie mit dem Fall $t' = 0$ vergleichen.

c. Bestimmen Sie die Minima der Dispersionsrelation.

5.3: Bogoliubovtransformation

Für ein System von zwei unterscheidbaren Fermionen (wobei wir die Vernichtungsoperatoren mit c und f bezeichen) lautet die Bogoliubov Transformation

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= uc + vf^\dagger && (1) \\ \gamma_2^\dagger &= u^* f^\dagger - v^* c\,. && (2) \end{aligned}$$

wobei u und v im allgemeinen komplexe Zahlen sind.

a. Zeigen Sie, dass diese Transformation die kanonischen Vertauschungsrelationen erhält, wenn

$$|u|^2 + |v|^2 = 1\,.$$

b. Verwenden Sie die Ergebnisse von (a), um folgenden Hamiltonoperator zu diagonalisieren:

$$H = \epsilon(c^\dagger c + f^\dagger f) + \Delta(c^\dagger f^\dagger + fc),$$

indem Sie H in die Form $H = E(\gamma_1^\dagger \gamma_1 + \gamma_2^\dagger \gamma_2) + \text{const}$ bringen. Bestimmen Sie E, u und v als Funktion von ϵ und Δ.

c. Der Grundzustand $|\psi_0\rangle$ ist der Vakuumzustand der über die Bogoliubovtransformation eingeführten Operatoren γ_i $(i = 1, 2)$, d.h., $\gamma_i|\psi_0\rangle = 0$. Geben Sie die Grundzustandsenergie E_0 an. Berechnen Sie die Erwartungswerte von $c^\dagger c$, c und $c^\dagger$ im Grundzustand und diskutieren Sie die physikalische Bedeutung der Ergebnisse.