Theorie 3: Vielteilchenphänomene

SS 2011, Studienziel Bachelor, TP-MAT 3

Dozent: F. Marquardt   Übungen: B. Kubala

Übungsblatt 8   Abgabe: 05.07. 2011

Präsenzaufgaben

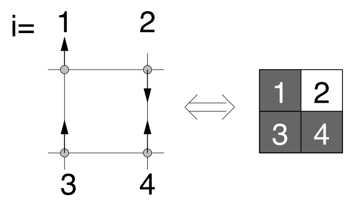
Aufgabe 16 : Entropie und chemisches Potential

Zwei Gaskanister der Volumina V_1 und V_2 befinden sich bei Temperatur $T_1 = T_2 = T$ auf potentiellen Energien U_1 und U_2. Die Kanister, zwischen denen Teilchen des idealen Gases ausgetauscht werden können, befinden sich im Gleichgewicht, d.h. ihr chemisches Potential sei identisch.
a) Nutzen Sie die aus der Vorlesung bekannten Ausdrücke für Energie und Entropie eines klassischen idealen Gases, um das chemischen Potential $\mu = \mu_{1/2} = \partial F_{1/2}/\partial N_{1/2}$ zu finden.
Das chemische Potential hat in diesem Fall auch Beiträge, die aus der Entropie des Gases stammen. Diese sorgen dafür, dass sich mehr Gasteilchen in einem Kanister aufhalten, wenn sein Volumen vergrößert wird.
b) Zeigen Sie, dass sich aus der Gleichgewichtsbedingung $\mu_1 = \mu_2$ gerade die barometrische Höhenformel, $\rho \propto \exp(-U/k_B T)$, ergibt.

Aufgabe 17 : Ising-Modell mit 4 Plätzen

Wir betrachten ein quadratisches Gitter aus 4 Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen mit ferromagnetischer Wechselwirkung zwischen benachbarten Spins,

$$E = -J \sum_{<i,j>} \sigma_i \sigma_j \ , \quad J > 0 \ .$$



Dabei wird über alle Paare von nächsten Nachbarn $< i, j >$ summiert, d.h. über die Paare von Quadraten (siehe Skizze), die eine gemeinsame Seite haben. Die ferromagnetische Kopplungskonstante J wird dabei so gewählt, dass sie die Einheit einer Energie hat und die Spinausrichtung des i-ten Spins durch $\sigma_i = \pm 1$ beschrieben wird.
a) Um die Zustandssumme (und weitere thermodynamische Größen) zu berechnen, müssen Sie die möglichen Energien des Systems und ihre Entartung finden. Skizzieren Sie die entsprechenden Konfigurationen (siehe Skizze). Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie mit der Gesamtzahl möglicher Zustände vergleichen und geben Sie die Zustandssumme an.
b) Aus der Zustandssumme kann die Wahrscheinlichkeit jedes Zustandes und damit Erwartungswerte von beliebigen Größen berechnet werden. Berechnen und skizzieren Sie in Abhängigkeit von T die Erwartungswerte $\langle \sigma_1 \rangle$ und die Korrelatoren $\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle$ und $\langle \sigma_1 \sigma_4 \rangle$.
c) Betrachten Sie nun den mittleren Spin $\bar{\sigma} = \frac{1}{4} \sum_{i=1,\dots 4} \sigma_i$. Aus dem Erwartungswert des mittleren Spins $\langle \bar{\sigma} \rangle$ kann man wenig über den Ferromagneten lernen (wieso?); mehr erkennt man aus den Fluktuationen des mittleren Spins, $\langle \bar{\sigma}^2 \rangle$.
Berechnen Sie $\langle \bar{\sigma}^2 \rangle$ aufbauend auf Ihren Ergebnissen aus (b) und skizzieren Sie die Temperaturabhängigkeit der Fluktuationen.

Hausaufgaben

Hausaufgabe 14 : Zustandsdichte *(5 Punkte)*

Wir betrachten die Dispersionsrelation

$$\varepsilon_{\text{BEC}} = \hbar v_s \sqrt{k^2 \left[1 + \hbar^2 k^2/(2mv_s)^2\right]}$$

für Anregungen in einem Bose-Einstein Kondensat.
a) Skizzieren Sie zuächst die Dispersionrelation und diskutieren Sie die jeweiligen Grenzfälle für kleine und große Wellenzahlen k.
b) Berechnen Sie die Zustandsdichte in drei Dimensionen für die angegebene Dispersionsrelation. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis in den entsprechenden Grenzfällen mit Ihnen bereits bekannten Zustandsdichten.
(Hinweis: Zur Untersuchung der Grenzfälle für die Zustandsdichte der Anregungen im BEC können Sie die entsprechenden Näherungen einführen, bevor Sie die Energieableitung der Zustandsanzahl durchführen.)

Hausaufgabe 15 : Cluster-Entwicklung *(7 Punkte)*

Wir betrachten die sogenannte Cluster-Entwicklung für den Effekt von Wechselwirkung auf die Zustandsgleichung eines Gases. Man kann zeigen, dass sich der Druck des Gases darstellen lässt als,

$$p = nk_BT \left[1 - b_2(n\lambda_{\text{th}}^3) + \ldots\right] \quad \text{mit} \quad b_2 = (2\lambda_{\text{th}}^3)^{-1} \int \mathrm{d}^3\vec{r} \left(e^{-\beta U(|\vec{r}|)} - 1\right) \, .$$

a) Wir betrachten die Gasteilchen zuerst als harte Kugel mit Radius R. Dann ist die Wechselwirkung zwischen zwei Gasteilchen durch das Potential

$$U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = U(\vec{r}) = U(r) = \begin{cases} +\infty & : \quad r < A \\ 0 & : \quad r \geq A \end{cases}$$

mit $A = 2R$ gegeben. Berechnen Sie die Korrektur b_2 zur Zustandsgleichung. Wieso ist die Korrektur zum Druck temperaturunabhängig?
b) Wir betrachten nun ein Potential, das für mittlere Abstände der Teilchen anziehend wirkt,

$$U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = U(\vec{r}) = U(r) = \begin{cases} +\infty & : \quad r < A \\ -|U_0| & : \quad A \leq r < B \\ 0 & : \quad r \geq B \end{cases} \, .$$

Bestimmen Sie die Korrektur für diesen Fall und skizzieren Sie die Temperaturabhängigkeit von $p/(nk_BT)$.