Statistische Physik und Thermodynamik

WS 2010/2011, Studienziel Bachelor, TP-4

Dozent: F. Marquardt   Übungen: B. Kubala

Übungsblatt 12   Abgabe: 03.02. 2011

Präsenzaufgaben

Aufgabe 24 : Funktionaldeterminante

Leiten Sie mit Hilfe der Funktionaldeterminanten die folgende Beziehung ab

$$\kappa_S \equiv -\frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_S = -\frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_T \cdot \frac{\left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_V}{\left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_p} \equiv \kappa_T \cdot \frac{C_V}{C_P} \,.$$

Aufgabe 25 : Metastabile Zustände und Tröpfchenbildung

Wird ein Gas rasch und gleichmäßig auf eine Temperatur T knapp unterhalb seiner Siedetemperatur T_S abgekühlt, so kann es eine Weile in diesem metastabilen Zustand verharren, bis es ausgehend von einzelnen Tröpfchen schließlich kondensiert. Die Gibbssche freie Energie für ein Tröpfchen mit Radius R besteht dabei aus einem Oberflächenterm und einem Volumenterm:

$$G(R) = \sigma 4\pi R^2 + \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{fl.}}(\mu_{\text{fl.}} - \mu_{\text{Gas}}) \,.$$

Die Oberflächenspannung σ beschreibt die benötigte Energie pro Fläche, um die Tröpfchenoberfläche zu bilden. Der Volumenterm wird durch die Differenz der chemischen Potentiale der Gas- und Flüssigphase und die (Teilchen)dichte der flüssigen Phase bestimmt. Dabei ist $\mu_{\text{fl.}} - \mu_{\text{Gas}} = \Delta\mu = \left.\frac{\partial \Delta\mu}{\partial T}\right|_p \Delta T = \frac{\Delta q_{\text{lat.}}}{T_S}\Delta T$ durch die latente Wärme (pro Teilchen), $\Delta q_{\text{lat.}} > 0$ und die Temperaturdifferenz zur Siedetemperatur $\Delta T = T - T_S$ charakterisiert.

a) Skizzieren Sie die Abhängigkeit der Gibbsschen freien Energie vom Tröpfchenradius R für $\Delta T > 0\,,\ \Delta T = 0$ und zwei verschiedene Temperaturen unterhalb der Siedetemperatur.
b) Bestimmen Sie für $\Delta T < T_S$ den kritischen Radius R_C, ab dem sich die Energie des Tropfen verringert, wenn er wächst, und die freie Energie für diesen Radius R_C.
c) Durch thermische Fluktuationen entstehen im metastabilen Zustand ständig Tröpfchen mit $R < R_C$. Schätzen Sie grob den typischen Radius dieser Tröpfchen für $\delta T = 0$ ab. Wie hängt die Wahrscheinlichkeit ein Tröpfchen mit R_C zu bilden von ΔT ab?
d) Einen ähnlichen metastabilen Zustand kann man auch für ein Isingmodell mit äußerem Magnetfeld finden. Erklären Sie die Analogie; was entspricht z.B. der Oberflächenspannung im Falle des ferromagnetischen Isingmodells.

Hausaufgaben

Hausaufgabe 24 : Clausius-Clapeyron Gleichung *(5 Punkte)*

a) Leiten Sie aus der Clausius-Clapeyron Gleichung und der barometrischen Höhenformel die Änderung der Siedetemperatur einer Flüssigkeit mit der Höhe ab. Betrachten Sie dazu den Dampf als ideales Gas mit $V_{\text{Gas}} \gg V_{\text{fl}}$ und nehmen Sie die Umgebungstemperatur als $T = 300\,\text{K}$ unabhängig von der Höhe und eine mittlere molare Masse der Luft von $m_L = 28\,\text{g/mol}$ an. Auf Meeresniveau siede Wasser bei $100\,^\circ\text{C}$ und die latente Wärme für Wasser betrage $q_{\text{fl, Gas}} = 2250\,\text{kJ/kg}$.
Geben Sie die Siedetemperaturen in $1\,\text{km}$ und $10\,\text{km}$ Höhe an.
b) Schätzen Sie ab, wie sich die Schmelztemperatur von Eis unter einem Schlittschuh erhöht, wenn die Auflagefläche $40\,\text{cm}$ lang und $5\,\text{mm}$ breit ist und mit $100\,\text{kg}$ belastet wird. Das Volumen von Eis ist $10\,\%$ größer als das von Wasser und die latente Wärme sei $-6000\,\text{J/mol}$.

Hausaufgabe 25 : Thermodynamische Beziehungen mit Magnetfeld *(7 Punkte)*

Wir betrachten ein magnetische System, das durch die Entropie S, die Temperatur T, die Magnetisierung M und ein äußeres Magnetfeld B bestimmt ist. Die Eigenschaften des Systems werden durch thermodynamische Antwortfunktionen beschrieben:

- die spezifische Wärme bei konstanter Magnetisierung, $C_M = T\, \frac{\partial S}{\partial T}\big|_M$
  und bei konstantem äußeren Magnetfeld $C_B = T\, \frac{\partial S}{\partial T}\big|_B$
- die isotherme Suszeptibilität, $\chi_T = \frac{\partial M}{\partial B}\big|_T$
  und die adiabatische Suszeptibilität, $\chi_S = \frac{\partial M}{\partial B}\big|_S$
- und den Temperaturkoeffizienten der Magnetisierung, $\alpha_B = \frac{\partial M}{\partial T}\big|_B$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Funktionaldeterminanten, dass

$$\frac{C_B}{C_M} = \frac{\chi_T}{\chi_S} \, .$$

b) Für die Änderung der freien Energie gilt (vergleichen Sie die entsprechenden Relationen für Druck und Volumen) $\text{d}F = B\text{d}M - S\text{d}T$. Nutzen Sie die daraus folgende Maxwell-Relation um zu zeigen, dass

$$\frac{\partial S}{\partial B}\bigg|_T = \frac{\partial M}{\partial T}\bigg|_B = \alpha_B \, .$$

Zeigen Sie damit, dass

$$C_B - C_M = T\frac{\alpha_B^2}{\chi_T} \, .$$

Bemerkung: Eine entsprechende Beziehung gilt für Druck und Volumen:

$$C_p - C_V = TV\frac{\alpha^2}{\kappa_T} \, .$$