Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik II

Blatt 4 - Präsenzübungen

Wintersemester 2011/12, Universität Erlangen, Prof. Florian Marquardt

Aufgabe 1: Phasenraumdynamik

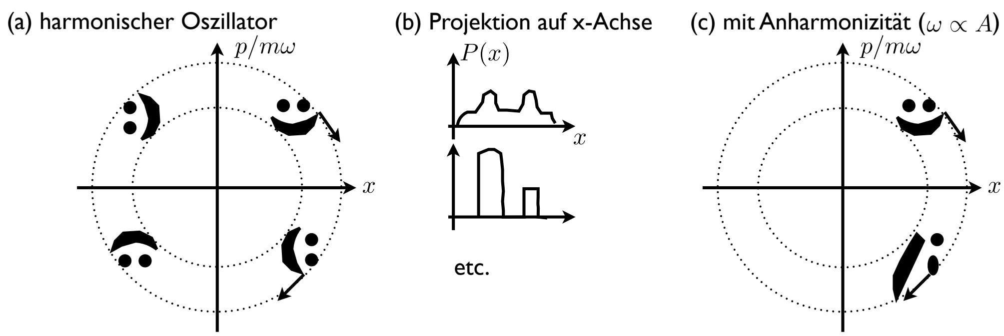

Figure 1: Zeitentwicklung im Phasenraum (grobe Skizze): (a) Die Verteilung rotiert im Uhrzeigersinn; die Form bleibt erhalten. (b) Projektion auf die x-Achse liefert die Ortsverteilung (c) Die Anharmonizität bewirkt, dass die Punkte mit großer Amplitude schneller rotieren, das Gesicht "zerfließt".

Aufgabe 2: Gequetschte Zustände

$\langle 0|(\hat{a}')^\dagger(\hat{a}')|0\rangle = \langle 0|\cosh^2\theta\hat{a}^\dagger\hat{a} + \sinh^2\theta\hat{a}\hat{a}^\dagger + \cosh\theta\sinh\theta(\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger)|0\rangle = \sinh^2\theta\langle 0|\hat{a}\hat{a}^\dagger|0\rangle = \sinh^2\theta$

Aufgabe 3: Energieoszillationen zwischen zwei harmonischen Oszillatoren

Aus den Heisenbergschen Bewegungsgleichungen erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle\hat{a}_1^\dagger(t)\hat{a}_1(t)\rangle = -\frac{d}{dt}\quad\langle\hat{a}_2^\dagger(t)\hat{a}_2(t)\rangle =&\quad ig\Big(\langle\hat{a}_1^\dagger(t)\hat{a}_2(t)\rangle - \langle\hat{a}_2^\dagger(t)\hat{a}_1(t)\rangle\Big)\\
\frac{d}{dt}\langle\hat{a}_1^\dagger(t)\hat{a}_2(t)\rangle = -\frac{d}{dt}\quad\langle\hat{a}_2^\dagger(t)\hat{a}_1(t)\rangle =&\quad ig\Big(\langle\hat{a}_1^\dagger(t)\hat{a}_1(t)\rangle - \langle\hat{a}_2^\dagger(t)\hat{a}_2(t)\rangle\Big), \qquad (1)
\end{aligned}$$

wobei die Resonanzbedingung $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ benutzt wurde. Wir führen die Operatoren $\hat{n}_+(t) = \hat{a}_1^\dagger(t)\hat{a}_1(t) + \hat{a}_2^\dagger(t)\hat{a}_2(t)$ und $\hat{n}_-(t) = \hat{a}_1^\dagger(t)\hat{a}_1(t) - \hat{a}_2^\dagger(t)\hat{a}_2(t)$ für die Summe und die Differenz der Besetzungszahlen ein. Es gilt $\hat{n}_+(t) = \text{const.} = \hat{n}_+(0)$ und

$$\frac{d^2}{dt^2}\hat{n}_-(t) = -4g^2\hat{n}_-(t) \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{n}_-(t) = 2ig\Big(\langle\hat{a}_1^\dagger(t)\hat{a}_2(t)\rangle - \langle\hat{a}_2^\dagger(t)\hat{a}_1(t)\rangle\Big) \qquad (3)$$

mit Lösung

$$\hat{n}_-(t) = \hat{n}_-(0)\cos 2gt - 2\mathrm{Im}\big(\hat{a}_1^\dagger(0)\hat{a}_2(0)\big)\sin 2gt. \qquad (4)$$

Für die Zeitentwicklung von $\langle\hat{a}_1^\dagger(t)\hat{a}_1(t)\rangle$ gilt

$$\langle\hat{a}_1^\dagger(t)\hat{a}_1(t)\rangle = \frac{1}{2}\Big(\langle\hat{n}_+(0)\rangle + \langle\hat{n}_-(t)\rangle\Big) \qquad (5)$$

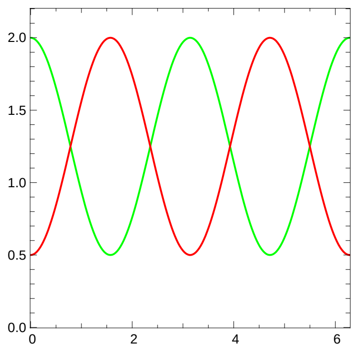

Figure 2: Schwebung zweier harmonischer Oszillatoren: Die Zeitentwicklung der Erwartungswerte $\langle \hat{a}_1^\dagger(t)\hat{a}_1(t)\rangle$ (grün, Startbedingung $\langle \hat{a}_1^\dagger(0)\hat{a}_1(0)\rangle = 2$) und $\langle \hat{a}_2^\dagger(t)\hat{a}_2(t)\rangle$ (rot, Startbedingung $\langle \hat{a}_2^\dagger(0)\hat{a}_2(0)\rangle = 0.5$). Die horizontale Achse zeigt die Zeit in Einheiten von g^{-1}.

und für $\langle \hat{a}_1^\dagger(0)\hat{a}_2(0)\rangle = 0$

$$\langle \hat{a}_1^\dagger(t)\hat{a}_1(t)\rangle = \langle \hat{n}_1(0)\rangle \cos^2 gt + \langle \hat{n}_2(0)\rangle \sin^2 gt, \tag{6}$$

siehe auch Fig. (). Das Ergebnis stimmt mit dem klassischen Bild von zwei gekoppelten Oszillatoren überein. Die Oszillatoren tauschen periodisch ihre Energie aus (Schwebung); zum Zeitpunkt $t = \pi/2g$ hat Oszillator 1 die Anfangsenergie des 2. Oszillators und umgekehrt. Die Gesamtenergie ist dabei konstant.

Bemerkung: Die Lösung kann auch durch das Einführen von Normalmoden $b_\pm = (a_1 \pm a_2)/\sqrt{2}$ hergeleitet werden. Wie aus der Vorlesung bekannt, gilt

$$H = \Omega_+ b_+^\dagger b_+ + \Omega_- b_-^\dagger b_- \tag{7}$$

mit $\Omega_\pm = \omega \mp g$. Die Zeitentwicklung für die Operatoren $\hat{b}_\pm(t)$ ist gegeben durch $\hat{b}_\pm(t) = e^{-i\Omega_\pm t}\hat{b}_\pm(0)$. Damit erhält man für die Besetzungszahl von Oszillator 1:

$$\begin{aligned} 2\hat{a}_1^\dagger(t)\hat{a}_1(t) &= \hat{b}_+^\dagger(t)\hat{b}_+(t) + \hat{b}_-^\dagger(t)\hat{b}_-(t) + \hat{b}_-^\dagger(t)\hat{b}_+(t) + \hat{b}_+^\dagger(t)\hat{b}_-(t) \\ &= \hat{b}_+^\dagger(0)\hat{b}_+(0) + \hat{b}_-^\dagger(0)\hat{b}_-(0) + e^{-i(\Omega_+-\Omega_-)t}\hat{b}_-^\dagger(0)\hat{b}_+(0) + e^{i(\Omega_+-\Omega_-)t}\hat{b}_+^\dagger(0)\hat{b}_-(0) \end{aligned} \tag{8}$$

Um die Lösung in Form der Korrelationen $\langle \hat{a}_i^\dagger(0)\hat{a}_j(0)\rangle$ darzustellen, verwendet man

$$\begin{aligned} \hat{b}_+^\dagger(0)\hat{b}_+(0) + \hat{b}_-^\dagger(0)\hat{b}_-(0) &= \hat{a}_1^\dagger(0)\hat{a}_1(0) + \hat{a}_2^\dagger(0)\hat{a}_2(0) \\ 2\hat{b}_+^\dagger(0)\hat{b}_-(0) &= \hat{a}_1^\dagger(0)\hat{a}_1(0) - \hat{a}_2^\dagger(0)\hat{a}_2(0) - \hat{a}_1^\dagger(0)\hat{a}_2(0) + \hat{a}_2^\dagger(0)\hat{a}_1(0) \end{aligned} \tag{9}$$

und erhält schließlich

$$\begin{aligned} 2\langle \hat{a}_1^\dagger(t)\hat{a}_1(t)\rangle &= \langle \hat{a}_1^\dagger(0)\hat{a}_1(0)\rangle + \langle \hat{a}_2^\dagger(0)\hat{a}_2(0)\rangle + \big(\langle \hat{a}_1^\dagger(0)\hat{a}_1(0)\rangle - \langle \hat{a}_2^\dagger(0)\hat{a}_2(0)\rangle\big)\cos 2gt \\ &\quad -2\mathrm{Im}\Big(\langle \hat{a}_1^\dagger(0)\hat{a}_2(0)\rangle\Big)\sin 2gt \end{aligned} \tag{10}$$

in Übereinstimmung mit Gl. (4) und (5).