Statistische Physik und Thermodynamik

WS 2010/2011, Studienziel Bachelor, TP-4

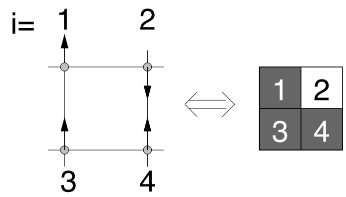
Dozent: F. Marquardt   Übungen: B. Kubala

Übungsblatt 7   Abgabe: 07.12. 2010

Präsenzaufgaben

Aufgabe 16 : Ising-Modell mit 4 Plätzen

Wir betrachten ein quadratisches Gitter aus 4 Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen mit ferromagnetischer Wechselwirkung zwischen benachbarten Spins,



$$E = -J \sum_{<i,j>} \sigma_i \sigma_j \ , \quad J > 0 \ .$$

Dabei wird über alle Paare von nächsten Nachbarn $< i, \, j >$ summiert, d.h. über die Paare von Quadraten (siehe Skizze), die eine gemeinsame Seite haben. Die ferromagnetische Kopplungskonstante J wird dabei so gewählt, dass sie die Einheit einer Energie hat und die Spinausrichtung des i-ten Spins durch $\sigma_i = \pm 1$ beschrieben wird.
a) Um die Zustandssumme (und weitere thermodynamische Größen) zu berechnen, müssen Sie die möglichen Energien des Systems und ihre Entartung finden. Skizzieren Sie die entsprechenden Konfigurationen (siehe Skizze). Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie mit der Gesamtzahl möglicher Zustände vergleichen und geben Sie die Zustandssumme an.
b) Aus der Zustandssumme kann die Wahrscheinlichkeit jedes Zustandes und damit Erwartungswerte von beliebigen Größen berechnet werden. Berechnen und skizzieren Sie in Abhängigkeit von T die Erwartungswerte $\langle \sigma_1 \rangle$ und die Korrelatoren $\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle$ und $\langle \sigma_1 \sigma_4 \rangle$.
c) Betrachten Sie nun den mittleren Spin $\bar{\sigma} = \frac{1}{4} \sum_{i=1,\ldots 4} \sigma_i$. Aus dem Erwartungswert des mittleren Spins $\langle \bar{\sigma} \rangle$ kann man wenig über den Ferromagneten lernen (wieso?); mehr erkennt man aus den Fluktuationen des mittleren Spins, $\langle \bar{\sigma}^2 \rangle$.
Berechnen Sie $\langle \bar{\sigma}^2 \rangle$ aufbauend auf Ihren Ergebnissen aus (b) und skizzieren Sie die Temperaturabhängigkeit der Fluktuationen.

Hausaufgaben

Hausaufgabe 14 : Entropie und chemisches Potential *(5 Punkte)*

Zwei Gaskanister der Volumina V_1 und V_2 befinden sich bei Temperatur $T_1 = T_2 = T$ auf potentiellen Energien U_1 und U_2. Die Kanister, zwischen denen Teilchen des idealen Gases ausgetauscht werden können, befinden sich im Gleichgewicht, d.h. ihr chemisches Potential sei identisch.
a) Nutzen Sie die aus der Vorlesung bekannten Ausdrücke für Energie und Entropie eines klassischen idealen Gases, um das chemischen Potential $\mu = \mu_{1/2} = \partial F_{1/2} / \partial N_{1/2}$ zu finden.

Das chemische Potential hat in diesem Fall auch Beiträge, die aus der Entropie des Gases stammen. Diese sorgen dafür, dass sich mehr Gasteilchen in einem Kanister aufhalten, wenn sein Volumen vergrößert wird.
b) Zeigen Sie, dass sich aus der Gleichgewichtsbedingung $\mu_1 = \mu_2$ gerade die barometrische Höhenformel, $\rho \propto \exp(-U/k_B T)$, ergibt.

Hausaufgabe 15 : Druck der Wärmestrahlung *(7 Punkte)*

Leiten Sie für die Plancksche Wärmstrahlung die Formel für das großkanonische Potential

$$\Phi = -k_B T \ln Z_{gk} = k_B T \int \mathrm{d}E D(E) \ln(1 - e^{-\beta E})$$

ab. Berechnen Sie Φ in drei Dimensionen und daraus den Druck $p = -\partial F/\partial V = -F/V$ der Wärmestrahlung. (Hinweis: Das chemische Potential der Photonen ist 0.)
Bestimmen Sie die Zustandsgleichung $pV = f(E)$.

Hausaufgabe 16 : Bose-Einstein Kondensat in der Magnetfalle *(Zusatzaufgabe)*

Bisher wurde die Bose-Einstein Kondensation von freien Teilchen betrachtet, für die periodische Randbedingungen und damit effektiv ein Kastenpotential angenommen wurde. Experimentell sind die Bosonen im parabolischen Potential einer Magnetfalle gefangen. Wir betrachten nun ein solches Einschnürungspotential der Frequenz ω_0 und haben damit Eigenenergien für die Bosonen, die durch

$$\begin{aligned} 1D &: \quad E_{n_x} = \hbar\omega_0 n_x \\ 2D &: \quad E_{n_x,n_y} = \hbar\omega_0 (n_x + n_y) \\ 3D &: \quad E_{n_x,n_y,n_z} = \hbar\omega_0 (n_x + n_y + n_z) \ , \end{aligned}$$

gegeben sind.
a) Bestimmen Sie zunächst die Zustandsdichten in 1, 2 und 3 Dimensionen in der magnetischen Falle. Finden Sie dazu, z.B. in zwei Dimensionen die Anzahl der Zustände (n_x, n_y) mit $E_{n_x,n_y} < E = \hbar\omega_0 n_{\text{max}}$ für $n_{\text{max}} \gg 1$.
b) Finden Sie das Integral für die Anzahl der besetzten Zustände auf und stellen Sie es als Integralausdruck dimensionsloser Größen dar. In welchen Dimensionen findet man Bose-Einstein Kondensation?
Finden Sie die Übergangstemperatur mit Hilfe des Integrals:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{x^k}{e^x - 1} = k!\zeta(k+1)$$

mit der Riemannschen Zetafunktion, für die $\zeta(2) = \pi^2/6\,,\ \zeta(3) \approx 1.202$ gilt.