Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg

WS 2012/2013

Institut für Theoretische Physik II
Prof. Dr. F. Heidrich-Meisner
Sprechstunde: Do. 9-11 Uhr, Raum 02.782.
E-mail: heidrich-meisner@lmu.de

6. Übungsblatt Many-body physics with ultra-cold atomic gases

21.11.2012
Besprechung: Dienstag, 27.11.2012

6.1: Freie Fermionen: Einteilchendichtematrix

(a) Wir betrachten freie Fermionen auf einem eindimensionalen Gitter mit dem Hamiltonoperator

$$H = -t \sum_{i=1}^{L} (c_i^\dagger c_{i+1} + h.c.)$$

Wir verwenden periodische Randbedingungen. Berechnen Sie die Einteilchendichtematrix:

$$\rho_1(i-j) = \langle FS | c_i^\dagger c_j | FS \rangle$$

wobei $|FS\rangle$ der Fermisee ist. Zeigen Sie, dass

$$\rho_1(i-j) \propto \sin(k_F(i-j))/|i-j|^\alpha$$

mit $\alpha = 1$. Beachten Sie, dass in 1D, $k_F = \pi n$, mit $n = N/L$.

(b) Berechnen Sie die Impulsverteilung Für das Modell aus (a).

(c) Wie hängt die Fermienergie von der Dichte n ab?

(d) Berechnen Sie die Zusatndsdichte $g(\epsilon)$ und skizzieren Sie diese.

6.2: Exakte Lösung des eindimensionalen Ising Modells mit Transfermatrizen

Die Zustandssumme des 1D klassischen Ising-Modells lässt sich mit Hilfe von Transfermatrizen exakt berechnen. Der Hamiltonian ist:

$$H = -\mu B \sum_{i=1}^{N} S_i - J \sum_i S_i S_{i+1}$$

wobei wir periodische Randbedingungen annehmen. Die klassischen Variablen S_i nehmen die Werte ± 1 an, μ ist das magnetische Moment. Die Zustandsumme ist:

$$Z = \sum_{S_1=\pm 1} \cdots \sum_{S_N=\pm 1} \exp\left(\beta J \sum_i S_i S_{i+1} + \beta \mu B \sum_i S_i \right) .$$

(a) Zeigen Sie, dass sich die Zustandssumme als

$$Z = \sum_{S_1=\pm 1} \cdots \sum_{S_N=\pm 1} \prod_{i=1}^{N} T(S_i, S_{i+1})$$

schreiben lässt, wobei wir die Transfermatrix

$$T(S_i, S_j) = \exp\big(K S_i S_j + (K'/2)(S_i + S_j)\big)$$

eingeführt haben ($K = \beta J$, $K' = \beta \mu B$).

(b) Die Transfermatrix kann durch eine 2×2 Matrix $\mathcal{T}_{S_i,S_j}$ dargestellt werden, wie sieht diese aus? Was ergibt sich dann für

$$\sum_{S_j=\pm 1} T(S_i, S_j) T(S_j, S_k)?$$

(c) Verwenden Sie diese Ergebnisse, um zu zeigen:

$$Z = \mathrm{Tr}(\mathcal{T}^N) = \lambda_+^N + \lambda_-^N \,,$$

wobei $\lambda_\pm$ die Eigenwerte der Trasnfermatrix sind.

(d) Bestimmen Sie die Eigenwerte und berechnen Sie die freie Energie für den Fall $N \gg 1$.

(e) Zeigen Sie, dass es im 1D Ising Modell keine spontane Symmetriebrechung gibt, d.h.,

$$m = \lim_{B \to 0^+} \lim_{N \to \infty} \frac{M}{N} = 0 \,,$$

wobei $M = \sum_i S_i$ ist.