

# Lösung Blatt 5 - Präsenzaufgaben

November 20, 2011

## Aufgabe 1 Rotating Wave Approximation

### Rotating Wave Approximation für den anharmonischen Oszillator (Teil A)

Wir betrachten einen anharmonischen Oszillator mit  $\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + W\hat{x}^4$ , wobei  $W$  die Stärke der Anharmonizität bezeichnet. Nun verwenden wir  $\hat{x} = x_{\text{ZPF}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$  mit  $x_{\text{ZPF}}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$ . Damit erhalten wir

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar g(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^4, \quad (1)$$

mit  $g = \frac{\hbar W}{4m^2\omega^2}$ . Nun wenden wir die **Rotating Wave Approximation** an, d.h., wir behalten lediglich resonante Terme mit gleicher Anzahl von Vernichter- und Erzeugerooperatoren. Der Term  $(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^4$  enthält  $6 = \frac{4!}{(4-2)!2!}$  solcher Beiträge. Allerdings müssen wir hier natürlich deren Ordnung berücksichtigen - Ziel ist es den Hamiltonian auf die Form  $\hat{H}_{\text{RWA}} = \hbar\omega'\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar U(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2 + \text{const}$  zu bringen. In diesem Sinne ordnen wir nun alle möglichen Kombinationen um (mit  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ )

$$\begin{aligned} \hat{a}\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger &= (\hat{a}^\dagger\hat{a})^2 + 3\hat{a}^\dagger\hat{a} + 2 \\ \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger &= (\hat{a}^\dagger\hat{a})^2 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 \\ \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}\hat{a}^\dagger &= (\hat{a}^\dagger\hat{a})^2 + \hat{a}^\dagger\hat{a} \\ \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} &= (\hat{a}^\dagger\hat{a})^2 \\ \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} &= (\hat{a}^\dagger\hat{a})^2 - \hat{a}^\dagger\hat{a} \\ \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} &= (\hat{a}^\dagger\hat{a})^2 + \hat{a}^\dagger\hat{a}. \end{aligned} \quad (2)$$

Demnach ergibt sich also

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{RWA}} &= \hbar[\omega + 6g]\hat{a}^\dagger\hat{a} + 6\hbar g(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2 + 3\hbar g \\ &= \hbar\omega'\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar U(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2 + \text{const}. \end{aligned} \quad (3)$$

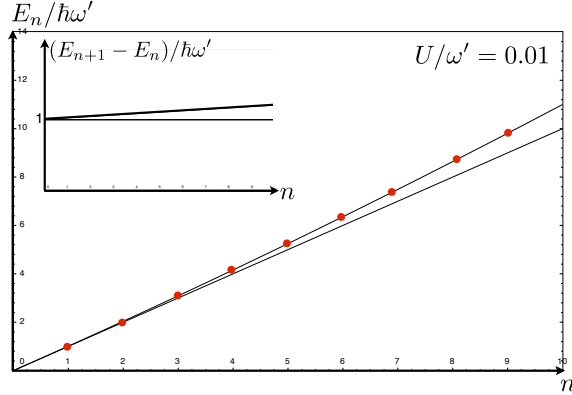


Figure 1: Energielevel des anharmonischen Oszillators in “Rotating Wave Approximation” für  $U/\omega' = 0.01$ . Für kleine  $n$  sind diese nahezu äquidistant. Die Anharmonizität führt jedoch zu einem anwachsen der Levelabstände bei grösseren  $n$ .

Die Eigenzustände sind in RWA die Besetzungszustände  $|n\rangle$  mit Eigenenergien  $E_n = \hbar\omega'(1 + \frac{U}{\omega'}n)$ . Die Energielevel sind in Fig. 1 gezeigt.

## Dynamik des anharmonischen Oszillators in RWA (Teil B)

Nun betrachten wir die Zeitentwicklung eines kohärenten Zustands  $|\alpha\rangle$  mit  $\alpha = \sqrt{\bar{n}}$  in RWA. Damit ist der Anfangszustand gegeben durch  $|\Psi(t=0)\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$  und die Zeitevolution trivial  $|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i\varphi_n} |n\rangle$  mit  $\varphi_n = t\omega'n [1 + \frac{U}{\omega'}n]$ . Da  $\alpha \in \mathbb{R}$  sind alle Zustände zunächst (bei  $t=0$ ) in Phase. Für  $t > 0$  ist der Phasenunterschied  $\delta\varphi_n \equiv \varphi_{n+1} - \varphi_n$  benachbarter Level  $\delta\varphi_n = t\omega' [1 + \frac{U}{\omega'} + \frac{2U}{\omega'}n]$ . Dieser Phasenunterschied geht direkt in den Erwartungswert  $\langle \Psi(t) | \hat{a} | \Psi(t) \rangle$  ein, denn  $\langle n | \hat{a} | n' \rangle e^{-i(\varphi_{n'} - \varphi_n)} \propto \delta_{n', n+1} e^{-i\delta\varphi_n}$ .

In einem kohärenten Zustand entspricht die Anzahlverteilung einer Poissonverteilung. Mittlere Bosonenzahl, sowie Varianz der Verteilung von  $|c_n|^2$  sind gegeben durch  $\bar{n}$ . Betrachten wir nun

$$\langle \Psi(t) | \hat{a} | \Psi(t) \rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-i\delta\varphi_n(t)} \alpha^{2n+1}}{n!}. \quad (4)$$

Das Hauptgewicht der Summe liegt zwischen  $[\bar{n} - \sqrt{\bar{n}}, \bar{n} + \sqrt{\bar{n}}]$  (da die Varianz der Verteilung gegeben ist durch  $\bar{n}$ ). Also ist ein gutes Mass für die **Phasenkohärenz** des Zustandes  $|\Psi\rangle$  der Phasenunterschied zwischen  $\delta\varphi_{\bar{n}+\sqrt{\bar{n}}}$  und  $\delta\varphi_{\bar{n}-\sqrt{\bar{n}}}$ . Sobald  $\delta\varphi_{\bar{n}+\sqrt{\bar{n}}} - \delta\varphi_{\bar{n}-\sqrt{\bar{n}}} > \pi$  löschen sich Beiträge in der Summe Eq. (4) gegenseitig aus und  $\langle \Psi(t) | \hat{a} | \Psi(t) \rangle \rightarrow 0$ . Dies passiert für Zeiten

$$t > \frac{\pi}{4U\sqrt{\bar{n}}}. \quad (5)$$

Diese **Dephasierungszeit** hängt also von der Stärke der Anharmonizität und der mittleren Boso-

nenzahl  $\bar{n}$  ab. Zu einem bestimmten Zeitpunkt beobachtet man jedoch **Coherence Revivals**. An diesen Zeitpunkten ist  $|\langle \Psi | \hat{a} | \Psi \rangle| = |\langle \Psi(t=0) | \hat{a} | \Psi(t=0) \rangle| = \alpha$ . Dies ist das erste mal der Fall sobald  $\forall n$  gilt  $\delta\varphi_{n+1} - \delta\varphi_n = 2\pi$  und damit für

$$t = \frac{\pi}{U}. \quad (6)$$

Diese Zeit ist [im Gegensatz zur Dephasierungszeit in Eq. (5)] **unabhängig** von  $\bar{n}$ . Für grosse  $\bar{n}$  sind also die Dephasierungszeit und die Coherence Revival's wohl separiert.

## Aufgabe 2 Ebene Wellen - Weitere Kopplung, allgemeinere Dispersionrelation

Wir betrachten eine Kette gekoppelter Oszillatoren mit periodischen Randbedingungen

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{j=1}^N \sum_{l=-m}^m J_l \hat{a}_{j+l}^\dagger \hat{a}_j \\ &= \sum_{j=1}^N J_0 \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^m J_l (\hat{a}_{j+l}^\dagger \hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j+l}). \end{aligned} \quad (7)$$

In der letzten Zeile haben wir verwendet, dass  $J_l = J_{-l}$ . Dies ist notwendig, damit  $\hat{H}$  hermitsch ist. Nun können wir einen Ansatz **ebener Wellen** machen:

$$\hat{a}_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \hat{b}_k e^{ikl}. \quad (8)$$

Um die periodischen Randbedingungen zu erfüllen muss gelten  $\hat{a}_{l+N} \stackrel{!}{=} \hat{a}_l$  und somit  $1 \stackrel{!}{=} e^{ikN}$ . Für ungerade  $N$ , folgt dass  $k = \frac{2\pi}{N}n$  mit  $n \in [-\frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{2}]$ . Für gerade  $N$  kann man wählen  $n \in [-\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1]$ . Dabei beschränken wir uns auf die sogenannte 1. Brioullin-Zone, d.h. auf  $N$  verschiedene Werte für  $k$  (es gibt ja auch lediglich  $N$  verschiedene Positionen in der Kette).

Dieser Ansatz diagonalisiert den Hamiltonian. Setzt man diesen in Eq. (7) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{J_0}{N} \sum_{k_1 k_2} \hat{b}_{k_1}^\dagger \hat{b}_{k_2} \sum_{j=1}^N e^{i(k_2 - k_1)j} \\
&\quad + \frac{1}{N} \sum_{l=1}^m J_l \sum_{k_1 k_2} (\hat{b}_{k_1}^\dagger \hat{b}_{k_2} \sum_{j=1}^N e^{ik_2 j - ik_1(j+l)} + \hat{b}_{k_1}^\dagger \hat{b}_{k_2} \sum_{j=1}^N e^{ik_2(j+l) - ik_1 j}) \tag{9}
\end{aligned}$$

$$= J_0 \sum_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \sum_{l=1}^m \sum_k J_l \left[ \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k e^{-ikl} + \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k e^{ikl} \right] \tag{10}$$

$$= \sum_k \omega_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k, \tag{11}$$

wobei  $\omega_k = J_0 + 2 \sum_{l=1}^m J_l \cos kl$ . Hierbei haben wir verwendet, dass  $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{ikj} = \delta_{k,0}$ . Damit können wir aber jede Dispersion  $\omega_k$  durch geschickte Wahl der Kopplungen  $J_l$  erhalten (hierbei spielen die  $J_l$ 's die Rolle der Fourierkoeffizienten). Die Eigenenergien sind dann schliesslich gegeben als  $E_j = \sum_k \omega_k n_k^j$ , wobei  $n_k^j$  die Anzahl der Bosonen in der  $k$ -ten Mode im Zustand  $|j\rangle$  bezeichnet.