Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik II

Wintersemester 2013/14, Universität Erlangen-Nürnberg, Dozent: Prof. Florian Marquardt

Blatt 6 - Abgabetermin: Mittwoch, 27.11.2013, in der Vorlesung

Exercises for the course Quantum Mechanics II

Winter term 2013/14, Universität Erlangen-Nürnberg, Prof. Florian Marquardt

Sheet 6 - Deadline: Wednesday, 27.11.2013, during the lecture

Präsenzübungen (Exercises during the tutorial)

Allgemeiner Hinweis: Fertigen Sie so oft wie möglich saubere Skizzen an, in denen auch wesentliche Längen, Frequenzen, Periodizitäten etc. vermerkt sind. Überlegen Sie sich selbst weitergehende Fragestellungen.

General hint: Whenever possible, always make clear sketches that include essential length and frequency scales, periodicities etc. Also think about other possible questions.

1. Korrekturen zur Rotating wave approximation

Betrachten Sie zwei gekoppelte Oszillatoren (zur Vereinfachung mit gleichen Massen und Frequenzen):

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2) + \frac{m\omega^2}{2}(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2) - K\hat{x}_1\hat{x}_2$$

Zeigen Sie durch Einsetzen, dass der Hamiltonoperator in eine Summe zweier unabhängiger Oszillatoren zerfällt, wenn man ihn durch $\hat{X}_\pm$ und $\hat{P}_\pm$ ausdrückt, mit:

$$\hat{X}_\pm = \frac{\hat{x}_1 \pm \hat{x}_2}{\sqrt{2}}\,,\; \hat{P}_\pm = \frac{\hat{p}_1 \pm \hat{p}_2}{\sqrt{2}}$$

Was sind die zugehörigen neuen Eigenfrequenzen $\Omega_\pm$? Zeigen Sie nebenbei, dass mit $\omega^2 = \tilde{\omega}^2 + K/m$ gilt: $\Omega_+ = \tilde{\omega}$ (die symmetrische Mode wird nicht durch eine Federkopplung $(K/2)(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)^2$ beeinflusst). Entwickeln Sie $\Omega_\pm$ bis zur zweiten Ordnung in g/ω und identifizieren Sie also die erste Korrektur zum RWA-Ergebnis. Betrachten Sie nun den Vernichteroperator $\hat{a}_+$, der zu $\hat{X}_+$ und $\hat{P}_+$ gehört. Drücken Sie ihn durch $\hat{a}_+^{\mathrm{RWA}}$ und $(\hat{a}_+^{\mathrm{RWA}})^\dagger$ aus, indem Sie ihn durch $\hat{x}_{1,2}$, $\hat{p}_{1,2}$ darstellen und sich dann an die Beziehungen zwischen $\hat{a}_+^{\mathrm{RWA}}$ und $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$ erinnern.

1. Corrections beyond the rotating wave approximation

Consider two coupled oscillators (for simplicity we consider equal masses and frequencies):

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2) + \frac{m\omega^2}{2}(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2) - K\hat{x}_1\hat{x}_2\,.$$

Show by means of a direct calculation that this Hamiltonian can be decomposed into a sum of two decoupled oscillators by using

$$\hat{X}_\pm = \frac{\hat{x}_1 \pm \hat{x}_2}{\sqrt{2}}\,,\; \hat{P}_\pm = \frac{\hat{p}_1 \pm \hat{p}_2}{\sqrt{2}}\,.$$

What are the corresponding eigenfrequencies $\Omega_\pm$? Show also that $\Omega_+ = \tilde{\omega}$ where $\omega^2 = \tilde{\omega}^2 + K/m$ (the symmetric mode is not affected by a coupling $(K/2)(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)^2$). Expand $\Omega_\pm$ up to second order in

g/ω and identify the leading order correction beyond the RWA. Consider the annihilation operator $\hat{a}_+$ which corresponds to $\hat{X}_+$ and $\hat{P}_+$. Rewrite $\hat{a}_+$ in terms of $\hat{a}_+^{\text{RWA}}$ and $(\hat{a}_+^{\text{RWA}})^\dagger$ by representing $\hat{a}_+$ in terms of $\hat{x}_{1,2}$, $\hat{p}_{1,2}$. Then, use the (known) relation between $\hat{a}_+^{\text{RWA}}$ and $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$.

2. Keine Interferenz zwischen zwei einzelnen Phononen (oder Photonen)

Betrachten Sie für eine Kette von Oszillatoren den Zwei-Phononen-Anfangszustand ($j_1 \neq j_2$)

$$|\Psi(0)\rangle = \hat{a}_{j_1}^\dagger \hat{a}_{j_2}^\dagger |0\rangle \ ,$$

wobei $|0\rangle$ den "Vakuumzustand" darstellt, also hier den Grundzustand $|0, 0, \ldots, 0\rangle$ zu einem Hamilton-operator $\hat{H} = \sum_{l,j} \tilde{H}_{lj} \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_j$. Nehmen Sie an, der Propagator $G(l-j, t)$ sei schon bekannt. Zeigen Sie (1.) für alle Zeiten ist $\langle \hat{a}_l(t) \rangle = 0$ an allen Orten l. (2.) $\left\langle \hat{a}_l^\dagger(t) \hat{a}_l(t) \right\rangle$ zeigt zu keiner Zeit ein Interferenzmuster, d.h. kann als Summe der Resultate geschrieben werden, die man erhalten würde, wenn bei $t = 0$ nur ein einziges Phonon bei j_1 bzw. bei j_2 wäre.

Betrachten Sie jetzt im Gegensatz dazu einen kohärenten Zustand, der durch den Verschiebungsoperator für viele Oszillatoren erzeugt wird,

$$|\Psi(0)\rangle = \hat{D}[\alpha_{j_1} = 1, \alpha_{j_2} = e^{i\varphi}, \alpha_{j \neq j_{1,2}} = 0] \, |0\rangle \ ,$$

bei dem also gilt: $\hat{a}_{j_1} |\Psi(0)\rangle = |\Psi(0)\rangle$ und $\hat{a}_{j_2} |\Psi(0)\rangle = e^{i\varphi} |\Psi(0)\rangle$, sowie $\hat{a}_{j \neq j_1, j_2} |\Psi(0)\rangle = 0$. Berechnen Sie nun wieder $\langle \hat{a}_l(t) \rangle$ und $\left\langle \hat{a}_l^\dagger(t) \hat{a}_l(t) \right\rangle$. Beobachten Sie, dass hier Interferenzterme auftreten. Der Grund ist, dass kohärente Zustände (wie sie im Lichtfeld durch einen Laser erzeugt werden) eine definierte Phase haben.

2. There is no interference between single phonons (or photons)

Consider a chain of oscillators and the initial (two-phonon) state ($j_1 \neq j_2$)

$$|\Psi(0)\rangle = \hat{a}_{j_1}^\dagger \hat{a}_{j_2}^\dagger |0\rangle \ .$$

Here, $|0\rangle$ is the "vacuum-state", i.e. the groundstate $|0, 0, \ldots, 0\rangle$ of $\hat{H} = \sum_{l,j} \tilde{H}_{lj} \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_j$. Assume that the propagator $G(l-j, t)$ is known. Show that (1.) $\langle \hat{a}_l(t) \rangle = 0$ for all times t and at all sites l. (2.) $\left\langle \hat{a}_l^\dagger(t) \hat{a}_l(t) \right\rangle$ does not show an interference pattern, i.e. it can be rewritten as a sum of terms which one would get if there was only a single phonon at j_1 and j_2, respectively at $t = 0$.

In contrast, consider a coherent state

$$|\Psi(0)\rangle = \hat{D}[\alpha_{j_1} = 1, \alpha_{j_2} = e^{i\varphi}, \alpha_{j \neq j_{1,2}} = 0] \, |0\rangle \ ,$$

where $\hat{D}$ is the many-oscillator displacement operator. Thus, $\hat{a}_{j_1} |\Psi(0)\rangle = |\Psi(0)\rangle$, $\hat{a}_{j_2} |\Psi(0)\rangle = e^{i\varphi} |\Psi(0)\rangle$, and $\hat{a}_{j \neq j_1, j_2} |\Psi(0)\rangle = 0$. Calculate $\langle \hat{a}_l(t) \rangle$ and $\left\langle \hat{a}_l^\dagger(t) \hat{a}_l(t) \right\rangle$. Show that interference patterns show up. This is because coherent states have a well-defined phase.

Hausaufgabe (Homework)

3. Sterne messen

Betrachten Sie einen 2-Phononen-Zustand wie in Aufgabe 2 am Anfang. Berechnen Sie jetzt aber die "Intensitätskorrelation", also

$$\left\langle \hat{a}_{l_1}^\dagger(t) \hat{a}_{l_1}(t) \hat{a}_{l_2}^\dagger(t) \hat{a}_{l_2}(t) \right\rangle$$

Zeigen Sie, dass darin - im Gegensatz zur Intensität $\left\langle \hat{a}_l^\dagger(t)\hat{a}_l(t) \right\rangle$ selbst – Interferenzterme auftreten, die nicht nur vom Betragsquadrat des Propagators abhängen. Dieser Effekt kann (im Falle von Photonen) z.B. dazu verwendet werden, den Durchmesser von Sternen aus der Korrelation zwischen Intensitätsschwankungen zu erhalten, die in der vom Stern emittierten Strahlung an weit entfernten Detektoren nachgewiesen wird.

A TEST OF A NEW TYPE OF STELLAR INTERFEROMETER ON SIRIUS

By R. HANBURY BROWN

Jodrell Bank Experimental Station, University of Manchester

AND

DR. R. Q. TWISS

Services Electronics Research Laboratory, Baldock

Referenz: R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, Nature 178, 1046 (1956)

3. Measuring stars

Consider a 2-phonon state as given at the beginning of exercise 2. Calculate the intensity-correlations, i.e.

$$\left\langle \hat{a}_{l_1}^\dagger(t)\hat{a}_{l_1}(t)\hat{a}_{l_2}^\dagger(t)\hat{a}_{l_2}(t) \right\rangle .$$

Show that interference terms show up which do not depend on the modulus squared of the propagator only (as opposed to the intensity $\left\langle \hat{a}_l^\dagger(t)\hat{a}_l(t) \right\rangle$). This effect could be used for instance to measure the diameter of a star: Using two distant (photon)detectors, one can analyze the intensity correlations of the radiation which is emitted by a star, which in turn reveals the diameter of the star.

A TEST OF A NEW TYPE OF STELLAR INTERFEROMETER ON SIRIUS

By R. HANBURY BROWN

Jodrell Bank Experimental Station, University of Manchester

AND

DR. R. Q. TWISS

Services Electronics Research Laboratory, Baldock

Reference: R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, Nature 178, 1046 (1956)

4. Propagation eines Ein-Phononen (Photonen)-Zustandes

Betrachten Sie eine Kette von N Oszillatoren mit $\hat{H} = \sum_{l,j} \hat{a}_l^\dagger \tilde{H}_{lj} \hat{a}_j$.

(a) Zeigen Sie, dass der Propagator durch die Matrixelemente des zu $\tilde{H}$ gehörenden Zeitentwicklungsoperators gegeben ist (also eine $N \times N$ Matrix):

$$G(l,j,t) = \left[e^{-i\tilde{H}t/\hbar} \right]_{lj}$$

Sie könnten dazu beispielsweise die Darstellung mit den Eigenvektoren von $\tilde{H}$ verwenden.

(b) Zeigen Sie, dass daraus sofort folgt:

$$\sum_j G(l,j,-t)G(j,m,t) = \delta_{jm}$$

(c) Betrachten Sie nun ein einzelnes Phonon, welches in einer Überlagerung verschiedener Orte erzeugt wird:

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_j \psi_j \hat{a}_j^\dagger |0\rangle .$$

Zeigen Sie, dass für $|\Psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\Psi(0)\rangle$ gilt:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{j'} \psi_{j'}(t)\hat{a}^\dagger_{j'}|0\rangle \ ,$$

wobei die $\psi_j(t)$ die zeitentwickelten Komponenten eines Wellenvektors im N-dimensionalen Hilbertraum von $\tilde{H}$ sind: $\psi_{j'}(t) = \sum_j G(j', j, t)\psi_j$. Es entwickelt sich also einfach das Wellenpaket des Phonons (oder Photons, je nachdem). Wir wollen dabei annehmen: $e^{-i\hat{H}t/\hbar}|0\rangle = |0\rangle$.

4. Propagation of a one-phonon (photon) state

Consider a chain of N oscillators where $\hat{H} = \sum_{l,j} \hat{a}^\dagger_l \tilde{H}_{lj}\hat{a}_j$.

(a) Show that the propagator is given by the matrix-elements of a $N \times N$ matrix

$$G(l, j, t) = \left[e^{-i\tilde{H}t/\hbar}\right]_{lj} \ ,$$

i.e. by the matrix elements of the time-evolution operator which corresponds to $\tilde{H}$. One might for instance work in a representation using the eigenvectors of $\tilde{H}$.

(b) Show that from this it follows

$$\sum_j G(l, j, -t)G(j, m, t) = \delta_{jm}$$

immediately.

(c) Consider a single phonon which is created in a superposition of different sites j:

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_j \psi_j \hat{a}^\dagger_j|0\rangle \ .$$

Show that

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{j'} \psi_{j'}(t)\hat{a}^\dagger_{j'}|0\rangle$$

by using $|\Psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\Psi(0)\rangle$. Here, $\psi_j(t)$ are the time-evolved components of a wave-vector in a N-dimensional Hilbert-space spanned by $\tilde{H}$, i.e. $\psi_{j'}(t) = \sum_j G(j', j, t)\psi_j$. Thus, it is only the wavepacket of the phonon (or photons) which evolves in time. Note that we assume $e^{-i\hat{H}t/\hbar}|0\rangle = |0\rangle$.