Theorie 3: Vielteilchenphänomene

SS 2011, Studienziel Bachelor, TP-MAT 3

Dozent: F. Marquardt   Übungen: B. Kubala

Übungsblatt 10   Abgabe: 19.07. 2011

Präsenzaufgaben

Aufgabe 20 : 1d-Isingmodell

Wir betrachten ein eindimensionales Isingmodell mit N Plätzen und periodischen Randbedingungen,

$$E = -2J \sum_{l=1}^{N} \sigma_l \sigma_{l+1} \qquad \text{mit} \quad \sigma_l = \pm 1 \quad \text{und} \quad \sigma_{N+1} = \sigma_1 \ .$$

a) Der Faktor $A(\sigma_l, \sigma_{l+1}) = e^{K\sigma_l\sigma_{l+1}}$ hängt von den Werten σ_l, $\sigma_{l+1} = \pm 1$ ab und kann daher als eine 2×2 -Matrix geschrieben werden. Geben Sie diese Matrix an.
b) Zeigen Sie, dass die Zustandssumme mit den Matrizen A und mit $K = 2J\beta$ als

$$Z = \sum_{\substack{\sigma_1=\pm 1 \\ \sigma_2=\pm 1 \\ \vdots}} e^{-\beta E(\{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_N\})} = \text{Spur}\left(A^N\right)$$

geschrieben werden kann.

c) Wir wollen nun die Grundidee sogenannter Renormierungsgruppen-Methoden einführen. Betrachten Sie dazu drei Gitterplätze des obigen Isingmodells. Das Produkt $\sum_{\sigma_2} A(\sigma_1, \sigma_2)\, A(\sigma_2, \sigma_3) \;=\; A'(\sigma_1, \sigma_3)$ liefert eine neue Matrix A', die direkt die Kopplung zwischen den Gitterplätzen 1 und 3 beschreibt, während der Wert des Spins am Platz 2 "ausintegriert" ist, und nicht mehr auftaucht.
Zeigen Sie, dass für eine Matrix $A = e^f \begin{pmatrix} e^K & e^{-K} \\ e^{-K} & e^K \end{pmatrix}$ die Matrix $A' = A^2$ in derselben Form wie A geschrieben kann mit "renormierten" Parametern f' und K' und finden Sie $K'(K)$.

Für die Zustandssumme gilt mit dieser Konstruktion

$$Z = \text{Spur}\left(A^N\right) = \text{Spur}\left(A'^{\,N/2}\right) \ .$$

Wir haben damit einen Renormierungsschritt durchgeführt und betrachten das System auf einer größeren Skala, auf der statt N nur noch $N/2$ Spins auftreten, die mit einer renormierten Kopplungskonstante K' wechselwirken.
d) Skizzieren Sie den Fluss der Kopplungskonstante, d.h. die Kopplungskonstante $K(n)$ nach n Renormierungsschritten, indem Sie die Gleichung für $K'(K)$ in den Fällen $K \gg 1$ und $K \ll 1$ analysieren.
e) Finden Sie, wie die Korrelationslänge ξ mit der Kopplungskonstante K skaliert, indem Sie durch Extrapolation des Verhaltens für große K bestimmen, nach wievielen Renormierungsschritten n die Kopplung verschwindend klein wird, es also keine Korrelationen mehr gibt.

Aufgabe 21 : Klassisches Gas

a) Für die Entropie eines Gases mit f Freiheitsgraden (z. B. $f = 3$ für ein einatomiges Gas) haben wir in der statistischen Physik den Ausdruck

$$S = Nk_B \left[\ln V/V_0 + \frac{f}{2} \ln T/T_0 - \ln N + \text{ Quantenkorrekturen} \right]$$

gefunden. Finden Sie für ein klassisches Gas die Temperatur $T(V)$ für eine adiabatische Volumenänderung.
b) Betrachten Sie einen thermisch isolierten Gasbehälter. Durch das plötzliche Entfernen einer Trennwand kann ein ideales einatomiges Gas frei (nichtadiabatisch) vom Volumen V_1 in ein Volumen V_2 expandieren. Berechnen Sie die Änderung der Entropie.
Danach werde das Gas adiabatisch wieder auf sein ursprüngliches Volumen V_1 komprimiert. Bestimmen Sie die Endtemperatur des Gases.

Hausaufgaben

Hausaufgabe 18 : Domänengrenzen *(8 Punkte)*

Die Zustandssumme des ferromagnetischen 1D-Ising Modells mit periodischen Randbedingungen,

$$E = -2J \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} \qquad \text{mit} \quad J > 0\,; \sigma_i = \pm 1$$

kann auch mit anderen Methoden als der Transfermatrixmethode bestimmt werden.
Ein Zustand des Spinsystems kann statt durch die Spinkonfiguration $\{\sigma_i\} = \{\sigma_1,\, \sigma_2,\, \ldots \sigma_N\}$ auch durch die Position von Domänenwänden eindeutig gekennzeichnet werden. Als Domänenwand bezeichnet man dabei eine Verbindung $(i,\, i+1)$ zwischen zwei Spins, die nicht parallel ausgerichtet sind, also $\sigma_i \sigma_{i+1} = -1$.
a) Bestimmen Sie die Energie eines Zustands mit n Domänenwänden. Wieviele verschiedene Zustände mit $n = 0, 1, 2, \ldots$ Domänenwänden gibt es? (Hinweis: Beachten Sie die periodischen Randbedingungen).
b) Zeigen Sie, dass die Zustandsumme als

$$Z = 2e^{-\beta E_0} \sum_{n=0,\,2,\,4,\ldots} \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} e^{-\beta 4Jn} \qquad \text{mit} \quad E_0 = -2JN$$

ausgedrückt werden kann.
c) Werten Sie die Zustandssumme aus, indem sie die Summe über alle geraden n durch einen extra Faktor $[1 + (-1)^n]$ in eine Summe über alle n umwandeln (Nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass N gerade ist). Zeigen Sie die Äquivalenz zum Ergebnis der Transfermatrixmethode.