Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik II

Blatt 3

Wintersemester 2011/12, Universität Erlangen, Prof. Florian Marquardt

Aufgabe 1: Harmonische Oszillatoren in der Natur

(a) Beispiele

Aus dem täglichen Leben kennen wir Pendel, Trampolin, Schaukel ($< 1\,\text{Hz}$); aus der Elektrotechnik LC-Schwingkreis und Antenne ($1\,\text{kHz}-1\,\text{GHz}$; aus dem Chemieunterricht Schwingungen/Rotationen von Molekülen ($10^{11} - 10^{12}\,\text{Hz}$), aus dem Physikunterricht ultrakalte Atome und Ionen in optischen, elektrischen oder magnetischen Fallen ($\text{Hz} - \text{kHz}$). Zudem können die Schwingungsmoden in einem Kristallgitter oder die Schwingungsmoden des elektromagnetischen Feldes als harmonische Oszillatoren betrachtet werden. Die elementaren Anregungen heißen Phononen ($\lesssim 10^{-12}\,\text{Hz}$) bzw. Photonen ($10^{15}\text{Hz}$).

In vielen Fällen können Potentiale in der Nähe eines Minimums durch ein quadratisches Potential genähert werden. Nur für große Anregungsenergien bzw. Auslenkungen werden dann die anharmonischen Terme wichtig. An einem metastabilen Punkt hingegen, also z.B. an einem Sattelpunkt, funktioniert die harmonische Näherung nicht.

Unter den quantenmechanischen Systemen unterscheidet sich z.B. das Zwei-Niveau-System sehr deutlich von einem harmonischen Oszillator. Näherungsweise kann es nur durch einen stark anharmonischen Oszillator genähert werden, nicht aber durch einen harmonischen.

(b) Fabry-Perot Kavität

Für die Resonanzfrequenz einer Fabry-Perot-Kavität gilt: $\omega = n \cdot \pi c/L$, wobei $n = 1, 2, ...$ und c die Lichtgeschwindigkeit, L den Abstand der Spiegel bezeichnet.

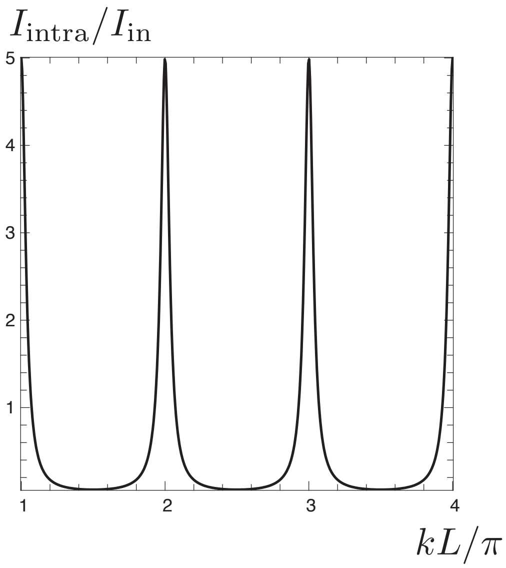

Figure 1: Intensität innerhalb einer symmetrischen Fabry-Perot Kavität in Abhängigkeit von der Wellenzahl k. An den Resonanzen ($kL = n \cdot \pi$) ist die Intensität um den Faktor $1/(1-R)$ im Vergleich zur eingestrahlten Intensität erhöht. R bezeichnet die Reflektivität der Spiegel und wurde hier als $R = 0.8$ gewählt.

Die Zahl der Anregungen n wird nun als die Anzahl der Photonen interpretiert. Entsprechend hat das optische Feld der Kavität eine Gesamtenergie $E = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$: Jedes Photon trägt die Energie $\hbar\omega$ bei; zusätzlich hat das Feld die Vakuumenergie $\hbar\omega/2$. Der "Erzeuger" erhöht die Photonenzahl um eins, der "Vernichter" erniedrigt sie um eins.

Ein kohärenter Zustand hat keine feste Photonenzahl. Führt man mehrere Messungen der Photonenzahl durch, so erhält man Messwerte, die der Poisson-Verteilung folgen: $p(n) = e^{-|\alpha|^2}|\alpha|^{2n}/n!$. Misst man $\hat{a}^\dagger + \hat{a}$ bzw. $i(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$ so erhält man die Amplitude des elektrischen bzw. des magnetischen Feldes. Die Unschärfe in der Messung dieser beiden konjugierten Variablen ist jeweils minimal und das Produkt folgt der Heisenbergschen Unschärferelation.

Aufgabe 2: Bewegung eines harmonischen Oszillators

(a) Frei

Ableiten der gegebenen Lösung liefert

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{x}(t) &= -\omega\hat{x}(0)\sin\omega t + \frac{\hat{p}(0)}{m}\cos\omega t \\
\frac{d^2}{dt^2}\hat{x}(t) &= -\omega^2\hat{x}(0)\cos\omega t - \omega\frac{\hat{p}(0)}{m}\sin\omega t
\end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit den Heisenbergschen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{x}(t) &= \frac{[\hat{x}(t), \hat{H}(t)]}{i\hbar} = \frac{\hat{p}(t)}{m} \\
\frac{d}{dt}\hat{p}(t) &= -m\omega^2\hat{x}(t).
\end{aligned}$$

(b) Mit Kraft

Wir betrachten die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2}{dt^2}\hat{x}(t) = -\omega^2\hat{x}(t) + F(t)/m. \tag{1}$$

Zunächst suchen wir die Lösung für einen Kraftpuls in Form einer Deltafunktion: $F(t) = F_0\delta(t-t_0)$. Die Erwartung ist, dass der Oszillator für $t \neq t_0$ eine harmonische Bewegung durchführt und zum Zeitpunkt $t = t_0$ durch den Kraftpuls eine instantane Änderung seines Impulses erfährt.

Im folgenden nehmen wir an, dass der Oszillator kurz vor dem Kraftstoß (zum Zeitpunkt $t = t_0 - \epsilon$) in Ruhe und an der Gleichgewichtsposition ist: $\hat{x}(t_0 - \epsilon) = \dot{\hat{x}}(t_0 - \epsilon) = 0$. Die allgemeine Lösung werden wir später mit Hilfe des Superpositionsprinzips erhalten.

Das Integral $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} dt$ über die Bewegungsgleichung liefert

$$\dot{\hat{x}}(t_0 + \epsilon) = F_0/m, \tag{2}$$

wobei benutzt wurde, dass $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\hat{x}(t)\,dt = 0$ gilt. Nach dem Kraftpuls ($t > t_0$) folgt der Oszillator also der Bewegungsgleichung eines freien harmonischen Oszillators mit der Anfangsbedingung $\hat{x}(t_0 + \epsilon) = 0$ und $\dot{\hat{x}}(t_0 + \epsilon) = F_0/m$, und wir erhalten als Lösung

$$\hat{x}(t) = \frac{F_0}{m\omega}\theta(t - t_0)\,\sin\omega(t - t_0) =: F_0\mathcal{G}(t, t_0) \tag{3}$$

wobei $\theta(s)$ die Stufenfunktion bezeichnet: $\theta(s < 0) = 0$, $\theta(s \geq 1) = 1$. Für gegebene Anfangsbedingungen $\hat{x}(t_0 - \epsilon) = \hat{x}_0$ und $\dot{\hat{x}}(t_0 - \epsilon) = p_0/m$ erhalten wir die Lösung

$$\hat{x}(t) = \hat{x}_0\cos\omega t + \frac{\hat{p}_0}{m\omega}\sin\omega t + F_0\mathcal{G}(t, t_0). \tag{4}$$

$\mathcal{G}(t, t_0)$ wird auch als Greensche Funktion des Problems bezeichnet, und erlaubt es uns im Folgenden, die Lösung für ein beliebige Kraft $F(t)$ zu bestimmen. Dazu bemerken wir, dass jede Kraft als Superposition von Deltafunktionen $\delta(t - t_0)$ gewichtet durch $F(t_0)$ interpretiert werden kann:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t')\delta(t - t')\,dt'. \tag{5}$$

Daher erwarten wir, dass die spezielle Lösung durch

$$\hat{x}_{sp}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t')\mathcal{G}(t, t')\,dt' \tag{6}$$

gegeben ist. Beachten Sie, dass die Lösung zum Zeitpunkt t nur von $F(t' < t)$ abhängen darf (Kausalität!). Dies wird durch die θ-Funktion in $\mathcal{G}(t, t')$ sichergestellt, sodass das Integral keine Beiträge für $t' > t$ aufweist.

Durch zweifache Ableitung von6 zeigt man, dass

$$\frac{d^2}{dt^2}\hat{x}_{sp}(t) = \frac{F(t)}{m} - \frac{\omega}{m}\int_{-\infty}^{t} F(t')\sin\omega(t - t')\,dt' = \frac{F(t)}{m} - \omega^2\hat{x}_{sp}(t) \tag{7}$$

und 6 damit tatsächlich die Bewegungsgleichung1 erfüllt. Für beliebige Anfangs-/Randbedingungen wird die spezielle Lösung wiederum mit der allgemeinen Lösung des homogenen Problems kombiniert.

(c) Veränderliche Federkonstante

Für $t < 0$ bezeichnen wir den Erzeugungsoperator (Vernichtungsoperator) mit $\hat{a}_0(t)$ $(\hat{a}_0^\dagger(t))$. Es gilt $\hat{a}_0(t) = \hat{a}_0(0)e^{-i\omega_0 t}$ und $x_0(t) = x_{\text{ZPF},0}\big(\hat{a}_0^\dagger(t) + \hat{a}_0(t)\big)$ sowie $p_0(t) = i\, p_{\text{ZPF},0}\big(\hat{a}_0^\dagger(t) - \hat{a}_0(t)\big)$ mit $x_{\text{ZPF},0} = \sqrt{\hbar/2m\omega_0}$ und $p_{\text{ZPF},0} = \sqrt{\hbar m\omega_0/2}$. Die Zeitentwicklung für $t > 0$ folgt den analogen Gleichungen (ohne Subskript 0). Wir fordern nun, dass die Lösungen für $t \gtrless 0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ stetig sind: $\hat{x}(0) = \hat{x}_0(0) = x_{\text{ZPF},0}\big(\hat{a}_0^\dagger(0) + \hat{a}(0)\big)$ und $\hat{p}(0) = \hat{p}_0(0) = ip_{\text{ZPF},0}\big(\hat{a}_0^\dagger(0) - \hat{a}(0)\big)$.

Der Erwartungswert von $\hat{x}^2(t > 0)$ ist nun bezüglich des alten Grundzustands zu ziehen:

$$\langle \hat{x}^2(t)\rangle = \langle 0|\big(\hat{x}(0)\cos\omega t + \frac{\hat{p}(0)}{m\omega}\sin\omega t\big)^2|0\rangle.$$

Dies geschieht am einfachsten, indem man $\hat{x}(0)$ und $\hat{p}(0)$ durch $\hat{a}_0(0)$ und $\hat{a}_0^\dagger(0)$ ausdrückt. Es ergibt sich

$$\langle \hat{x}^2(t)\rangle = x_{\text{ZPF},0}^2\big(\cos^2\omega t + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\sin^2\omega t\big).$$

Es gilt zudem $\langle \hat{x}(t)\rangle = 0$ und damit $\langle \hat{x}^2(t)\rangle = \operatorname{Var}\hat{x}$. Erhöht man ω im Vergleich zu ω_0, so verringert sich die Varianz. Dies entspricht der klassischen Vorstellung einer Teilchenwolke, deren Ausdehnung sich verringert, sobald sich die Federkonstante (bzw. die Fallenfrequenz) erhöht.

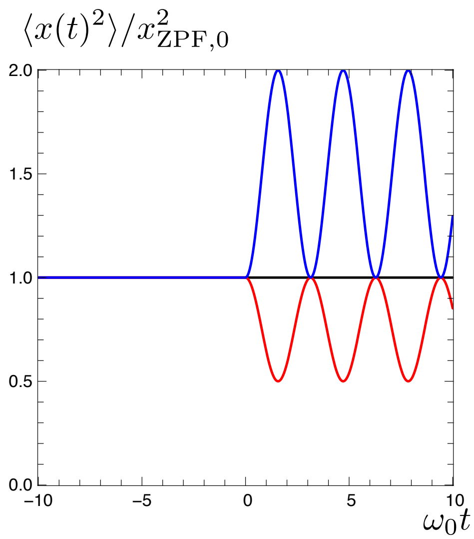

Figure 2: Zeitentwicklung der Varianz eines harmonischen Oszillators mit veränderlicher Federkonstante. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Frequenz vergrößert (rote Kurve, $\omega = \sqrt{2}\omega_0$) bzw. verkleinert (blaue Kurve, $\omega = \omega_0/\sqrt{2}$).