Statistische Physik und Thermodynamik

WS 2010/2011, Studienziel Bachelor, TP-4

Dozent: F. Marquardt   Übungen: B. Kubala

Übungsblatt 10   Abgabe: 20.01. 2011

Präsenzaufgaben

Aufgabe 21 : RG-Fluss im Ising-Modell

Wir betrachten wie in der Vorlesungs Wilsons RG für das Ising-Modell in $4-\epsilon$ Dimensionen. Nach einer Umskalierung $\vec{x}' = \frac{\lambda_0}{\lambda}\vec{x}$ mit einem Parameter λ, der die Längenskala bezeichnet, auf der das System betrachtet wird, findet man für das Energiefunktional des kontinuierlichen Ising-Modell die Form

$$\beta F_\lambda\left[m_\lambda\right] = \int \mathrm{d}\vec{x}' \left[\frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}' m_\lambda\right)^2 + \frac{1}{2} r(\lambda) m_\lambda^2 + u(\lambda) m_\lambda^4\right] ,$$

wobei $m_\lambda(\vec{x}')$ die Magnetisierung des Systems beschreibt.
a) Finden Sie aus diesem Ausdruck die Dimension von m_λ und zeigen Sie, dass

$$x = \lambda^2 r(\lambda) \quad \text{sowie} \qquad y = \lambda^{4-d} u(\lambda)$$

dimensionslose Größen sind.
Für diese fand Wilson für $\epsilon = 4-d \ll 1$ die Flussgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = 2x - 12xy + 12y \quad ; \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = \epsilon y - 36y^2$$

mit dem Flussparameter $\tau = \ln\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)$, die wir im folgenden analysieren wollen.
b) Finden Sie die Fixpunkte (in niedrigster Ordnung in ϵ) und skizzieren Sie den Fluss für den physikalisch relevanten Bereich $y \geq 0$ und $d < 4$.
c) Um den Phasenübergang quantitativ zu untersuchen linearisieren wir die Flussgleichung um den nicht-trivialen Fixpunkt, so dass wir die Flussgleichungen als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\begin{pmatrix}\delta x\\ \delta y\end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix}\delta x\\ \delta y\end{pmatrix}$$

schreiben können. Finden Sie die Matrix T und die Eigenwerte $\lambda_{1/2}$ und Eigenvektoren $\vec{e}_{1/2}$ von T.
d) Die Eigenvektoren definieren Richtungen im $x-y$ Parameterraum, in denen die Flussgleichungen einfach gelöst werden können. Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung von der Form $\begin{pmatrix}\delta x(\tau)\\ \delta y(\tau)\end{pmatrix} = \sum_{j=1,2} v_j^0 e^{\lambda_j \tau}\, \vec{e}_j$ mit $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 < 0$ ist.

Machen Sie Sich klar, dass $v_1^0 = \text{const.} \cdot (T-T_c)/T_c = \text{const.} \cdot t$ und dass t bzw. v_1^0, den Abstand zu der Linie beschreibt, welche die beiden Phasen separiert.
Finden Sie für ein gegebenes t bzw. v_1^0 und für $v_2^0 \ll 1$ den Flussparameter τ_ξ, für den $\delta x(\tau_\xi) = 1$ wird. Die zu τ_ξ gehörige Längenskala λ entspricht der Korrelationslänge des Systems. Finden Sie so die Abhängigkeit der Korrelationslänge ξ von t, bzw. den kritischen Exponenten ν.

Hausaufgaben

Hausaufgabe 21 : Korrelationslänge und RG-Fluss für das 1d-Isingmodell *(6 Punkte)*

Für das 1d-Isingmodell haben wir die Gleichung

$$K' = \frac{1}{2} \ln \left[\cosh(2K)\right]$$

für die renormierte Kopplungskonstante K' nach einem Renormierungsschritt von N auf $N/2$ Spins gefunden.
Skizzieren Sie den Fluss der Kopplungskonstante, d.h. die Kopplungskonstante $K(n)$ nach n Renormierungsschritten, indem Sie obige Gleichung für $K \gg 1$ und $K \ll 1$ analysieren.
Finden Sie, wie die Korrelationslänge ξ mit der Kopplungskonstante K skaliert, indem Sie durch Extrapolation des Verhaltens für große K bestimmen, nach wievielen Renormierungsschritten n die Kopplung verschwindend klein wird, es also keine Korrelationen mehr gibt.