Theorie 3: Vielteilchenphänomene
Sommersemester 2012
Dozent: F. Marquardt
Blatt 8, Abgabe: 14.6.2012

Präsenzaufgabe

Elektronen in 2D

a) Zeigen Sie, dass spinlose, freie (nichtrelativistische) Elektronen der Masse m in zwei Dimensionen (x, y) eine konstante Zustandsdichte $D(E) = D_0$ haben und bestimmen Sie die Konstante D_0. Gehen Sie dazu von periodischen Randbedingungen in einem System der Größe $L \times L$ aus.
b) Berechnen Sie für Fermionen mit chemischem Potential μ für obige Zustandsdichte die mittlere Teilchenzahl $\bar{N}$ als Funktion von Temperatur T und μ.

Hinweis:

$$\int \mathrm{d}z \frac{1}{e^z + 1} = -\ln\left(1 + e^{-z}\right)$$

c) Bestimmen Sie aus der Bedingung, $\bar{N}(T) = \bar{N}(T = 0) = \text{konst.}$, die Abhängigkeit des chemische Potential μ von Temperatur und Fermienergie, $E_F = \mu(T = 0)$.
d) Für welche Temperatur wird $\mu = 0$?
Skizzieren Sie $\mu(T)$ und diskutieren Sie die Grenzfälle $k_B T \ll E_F$ und $k_B T \gg E_F$.

Hausaufgabe

Graphen

a) Zeigen Sie, dass freie Teilchen in zwei Dimensionen, (x, y), mit der Dispersionsrelation

$$E = \hbar v |\vec{k}| = \hbar v \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

die Zustandsdichte $D(E) = D_0 \cdot E$ für $E \geq 0$ haben und bestimmen Sie die Konstante D_0. Gehen Sie dazu von periodischen Randbedingungen in einem System der Größe $L \times L$ aus.
b) Berechnen Sie für Fermionen mit chemischem Potential $\mu(T) \equiv 0$ für obige Zustandsdichte die Temperaturabhängigkeit von mittlerer Teilchenzahl

$\langle N\rangle$ und dem Erwartungswert der Energie $\langle E\rangle$.
(Hinweis: Numerische Vorfaktoren, die aus der expliziten Berechnung auftretender dimensionsloser Integrale stammen, müssen Sie nicht bestimmen.)

Wir betrachten im weiteren Fermionen mit einer Zustandsdichte der Form

$$D(E) = \begin{cases} D_0\,|E| & : \quad -E_c \le E \le +E_c \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

Dies ist ein grobes Modell für die Zustandsdichte von Graphen (Nobelpreis 2010).
Nehmen Sie an, dass das chemische Potential bei Temperatur $T = 0$ in der Mitte des fermionischen Bandes bei $\mu = 0$ liegt.
c) Argumentieren Sie, weshalb für diese Zustandsdichte die mittlere Teilchenzahl $\langle N\rangle$ für $\mu(T) \equiv 0$ temperaturunabhängig ist.
d) Skizzieren Sie die Besetzung $n(E) = f(E) \cdot D(E)$ (wobei $f(E)$ die Fermifunktion bezeichnet) für $T = 0$, $k_B T \ll E_c$ und $k_B T \gg E_c$.