Theorie 3: Vielteilchenphänomene

SS 2011, Studienziel Bachelor, TP-MAT 3

Dozent: F. Marquardt   Übungen: B. Kubala

Übungsblatt 1 Abgabe: 17.05. 2011

Präsenzaufgaben

Aufgabe 1 : Wahrscheinlichkeitsverteilungen

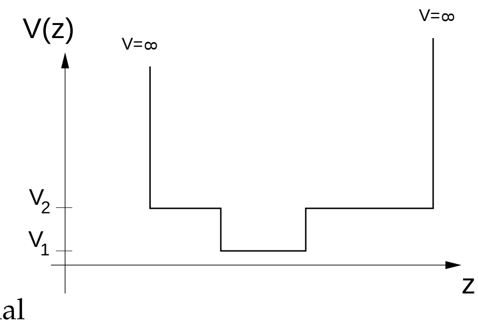
Wir betrachten allgemeine Wahrscheinlichkeitsverteilungen für diskrete Ereignisse, $P_n,\ n \in \mathbb{N}$, und für kontinuierliche Ereignisse, $\rho(x),\ x \in \mathbb{R}$.
a) Geben Sie für beide Fälle Ausdrücke für den Mittelwert und für die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert an.
b) Berechnen Sie Mittelwert und mittlere quadratische Abweichung für einen idealen Würfel. Was ist P_n?
c) Wie berechnet man für P_n und $\rho(x)$ die Wahrscheinlichkeit einen
(i) Wert größer als x_0 (ii) einen Wert zwischen x_0 und x_1 (iii) irgendeinen Wert zu finden?
d) Betrachten Sie nun eine beliebige Funktion G_n bzw. $g(x)$. Was ist der Erwartungswert von G, bzw. g. Geben Sie Funktionen an, mit deren Hilfe Sie Mittelwert, quadratische Abweichung und die Wahrscheinlichkeiten in c) finden können.

Aufgabe 2 : Normalverteilung und Maxwell-Geschwindigkeitsverteilung
Betrachten Sie eine Gaussfunktion $e^{-\alpha x^2}$.
a) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2}$. (Hinweis: Betrachten Sie das Quadrat der gesuchten Größe und wechseln Sie zu Polarkoordinaten.)
b) Berechen Sie die Momente $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^n\, e^{-x^2}$ für $n = 1, 2, 3, 4$.
c) Geben Sie eine auf der Gaussverteilung beruhende Wahrscheinlichkeitsverteilung an, die normiert ist, den Mittelwert x_m und die Varianz σ hat und skizzieren Sie diese Verteilung, die sogenannte Normalverteilung.
d) Die Geschwindigkeitsverteilung eines Gases hat die Form einer Gaussverteilung

$$\rho(\vec{v}) \propto \exp\left(-\frac{m\vec{v}^2}{2k_B T}\right).$$

Bestimmen Sie die Normierung und geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Betrag der Geschwindigkeit $v = |\vec{v}|$ in drei Raumdimensionen an.
e) Bestimmen Sie den wahrscheinlichsten Geschwindigkeitsbetrag $v^{\max}$, den wahrscheinlichsten Wert für die x-Komponente der Geschwindigkeit $v_x^{\max}$, und die Erwartungswerte $\langle\vec{v}\rangle,\ \langle v\rangle,\ \langle v_x^2\rangle,\ \langle v^2\rangle$.

Aufgabe 3 : Barometrische Höhenformel



a) Wir betrachten ein stückweise konstantes Potential $V(z)$ (siehe Skizze). Skizzieren Sie die Dichteverteilung eines Gases in diesem Potential für kleine, mittlere und große Temperatur, wobei $k_B T$ zu diesem Zweck mit $V_2 - V_1$ zu vergleichen ist.

b) Betrachten Sie ein logarithmisches Zentralpotential

$$V(r) = \begin{cases} V_0 \ln(r/r_0) & : \quad a < r < b \\ \infty & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

in $d = 1, 2, 3$ Raumdimensionen. Geben Sie die Dichteverteilung $\rho(\vec{r})$ eines Gases in einem Zentralpotential der angegebenen Form an. Was passiert mit der Normierung $\tilde{Z} = \int d^d r \rho(\vec{r})$, wenn man die obere Grenze des Potentials b gegen Unendlich gehen lässt? Für welche Temperaturen ist die Dichte noch normierbar?
c) Wir betrachten nun das $1/r$ Gravitationspotential eines Planeten der Größe R_{min} in drei Dimensionen. Führen Sie wieder einen Abschneideradius R_{max} ein und skizzieren Sie die Dichteverteilung für verschiedene R_{max}.
Wie verhält sich die Normierungskonstante $\tilde{Z}$ für $R_{\text{max}} \to \infty$. Was bedeutet dies für den Anteil des Gases innerhalb eines festen Abstandes vom Planetenmittelpunkt? Ist die Planetenatmosphäre also stabil?

Hausaufgaben

Hausaufgabe 1 : Binomialverteilung *(6 Punkte)*

a) Wieviele verschiedenen Möglichkeiten gibt es, bei M Würfen einer Münze n mal Kopf zu finden?
b) Ein Betrunkener vollführt eine Zufallsbewegung, indem er in jedem Zeitschritt mit einer Wahrscheinlichkeit p einen Meter nach rechts, mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ einen Meter nach links torkelt. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(M, n)$ an, den Betrunkenen nach M Zeitschritten n Meter rechts vom Ausgangsort entfernt zu finden. Skizzieren Sie $P(M, n)$.
c) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle n \rangle$ und $\langle n^2 \rangle$.
d) In einem Kanister des Volumens V seien $M = 10^{24}$ Gasatome gleichmässig verteilt. Betrachten Sie ein Teilvolumen $v = V/100$ des Kanisters. Wieviele Atome erwartet man im Volumen v zu finden? Wie groß ist die relative Schwankung der Zahl der Atome, die sich in v befinden?

Hausaufgabe 2 : Enartung und freie Energie *(6 Punkte)*

Ein System bestehe aus N Zuständen mit Energie $\epsilon_0 = 0$ und M Zuständen der Energie $\epsilon_1 > 0$.
a) Bestimmen Sie Zustandssumme und freie Energie des Systems.
b) Bestimmen Sie die Entropie des Systems und diskutieren Sie den Grenzfall verschwindender und den Fall großer Temperatur. Skizzieren Sie $S(T)$.
Betrachten Sie im folgenden $N = 1$.
c) Berechnen Sie die mittlere Energie $E = \langle H \rangle$ des Systems und skizzieren Sie ihre Temperaturabhängigkeit für $M = 1$ und $M \gg 1$.