Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg

WS 2012/2013

Institut für Theoretische Physik II
Prof. Dr. F. Heidrich-Meisner
Sprechstunde: Do. 9-11 Uhr, Raum 02.782.
E-mail: heidrich-meisner@lmu.de

7. Übungsblatt Many-body physics with ultra-cold atomic gases

28.11.2012
Besprechung: Dienstag, 11.12.2012

7.1: Feshbach-Resonanzen

Wir wollen in einem einfachen Bild eine Feshbach-Resonanz studieren. Wir gehen von einem offenen Kanal (mit Potential $U_o(\boldsymbol{r})$) und einem geschlossenen Kanal (mit Potential $U_c(\boldsymbol{r})$) aus. Wir bezeichnen die Wellenfunktion im offenen(geschlossenen) Kanal mit $\psi_o(\boldsymbol{r})$ ($\psi_c(\boldsymbol{r})$). Unter der Annahme einer kleinen Kopplung g zwischen den Kanälen können wir von den gekoppelten Schrödingergleichungen ausgehen:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U_o(r) - E\right)\psi_o + g\psi_c = 0 \tag{1}$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U_c(r) - E\right)\psi_c + g\psi_o = 0\,. \tag{2}$$

(a) Entwickeln Sie ψ_c in Eigenzuständen des geschlossenen Kanals und bestimmen Sie die Entwicklungskoeffizienten, indem Sie in Glg. (2) einsetzen.

(b) In der Nähe der Resonanz dominiert nur ein Eigenzustand ψ_c^{res} das Verhalten. Finden Sie unter dieser Annahme die Wellenfunktion im offenen Kanal.
Hinweis: Für ψ_o erhalten Sie eine inhomogene lineare DGL. Die Lösung der homogenen DGL kann durch die Streulänge a_{bg} ausgedrückt werden. Machen Sie für die inhomogene Lösung den Ansatz

$$\psi_{o,inh} = A(1 - b/r)\,.$$

(c) Leiten Sie einen Ausdruck für die effektive Streulänge ab, indem Sie die Lösung von Gleichung (1) als

$$\psi_o = \alpha\psi_{o,hom} + \beta\psi_{o,inh}$$

schreiben. Sie sollten erhalten:

$$a = a_{bg} + A\frac{b - a_{bg}}{\alpha/\beta + A}\,.$$

Bestimmen Sie das unbekannte Verhältnis α/β aus Glg. (2).

7.2: Einteilchendichtematrix und Impulsverteilung von idealen Bosegasen

Wir betrachten ein ideales Bosegases, das sich in einem Volumen $V = L^3$ befindet.

(a) Geben Sie die Einteilchendichtematrix, und zwar für $T > T_C$ und $T < T_C$. Was erhält man für die Impulsverteilung in diesen beiden Fällen?

(b) Für ein homogenes System, wie hängen die Eigenwerte der Einteilchendichtematrix mit der Impusverteilung zusammen?

(c) Wie hängen die Eigenfunktionen der Einteilchendichtematrix mit den Eigenfunktionen des Hamiltonoperators zusammen?

(d) Skizzieren Sie die Einteilchendichtematrix als Funktion von $s = |\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}|$ für (i) $T > T_c$ und (ii) $T < T_c$.

(e) Was ergibt sich im klassischen Limes für die Ortsabhängigkeit der Einteilchendichtematrix $\rho^{(1)}(s)$?

7.3: Kohärente Zustände

Wir definieren kohärente Zustände als Eigenzustände des Vernichtungsoperators:

$$a_\mu |\psi\rangle_{\text{coh}} = \alpha_\mu |\psi\rangle_{\text{coh}} \, .$$

Zeigen Sie, dass sich kohärente Zustände wie folgt schreiben lassen:

$$|\psi\rangle_{\text{coh}} \propto \exp(\alpha_\mu a_\mu^\dagger)|0\rangle \, ,$$

wobei $|0\rangle$ der Vakuumzustand ist. Bestimmen Sie die Normierungskonstante.