Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik II

Blatt 3 - Hausaufgabe

Wintersemester 2011/12, Universität Erlangen, Prof. Florian Marquardt

3. Kohärente Zustände: Ortsdarstellung

Es gilt $\hat{a} = \frac{1}{2x_{\text{ZPF}}}\big(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}\big) = \frac{1}{2x_{\text{ZPF}}}\big(\hat{x} + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{d}{dx}\big)$. Angewandt auf den Zustand $\Psi(x) = \mathcal{N}\exp\big(-\frac{(x-\bar{x})^2}{4x_{\text{ZPF}}^2} + ik_0 x\big)$ erhält man

$$\hat{a}\Psi(x) = \frac{1}{2x_{\text{ZPF}}}\big(x + i\frac{\hbar k_0}{m\omega} - \frac{\hbar}{m\omega}\frac{x-\bar{x}}{2x_{\text{ZPF}}^2}\big)\Psi(x) = \frac{1}{2x_{\text{ZPF}}}\big(\bar{x} + i\frac{\hbar k_0}{m\omega}\big)\Psi(x).$$

$\Psi(x)$ ist also Eigenzustand von $\hat{a}$ mit dem Eigenwert $\alpha = \frac{1}{2x_{\text{ZPF}}}\big(\bar{x} + i\frac{\hbar k_0}{m\omega}\big)$.

Die globale Phase der Wellenfunktion $|\Psi\rangle$ ist nicht notwendigerweise die aus der Definition eines kohärenten Zustandes $|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$.

4. Kohärente Zustände: "Schrotrauschen"

Für einen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ berechnet man:

$$\langle\hat{n}\rangle = \langle\alpha|\hat{n}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\alpha^*\alpha|\alpha\rangle = |\alpha|^2$$

$$\langle\hat{n}^2\rangle = \langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger a|\alpha\rangle = \langle\alpha|\hat{a}^\dagger\big(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1\big)\hat{a}|\alpha\rangle = |\alpha|^4 + |\alpha|^2$$

$$\mathrm{Var}\,\hat{n} = \langle\big(\hat{n} - \langle\hat{n}\rangle\big)^2\rangle = \langle\hat{n}^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle^2 = |\alpha|^2 = \langle\hat{n}\rangle$$

$$\sqrt{\mathrm{Var}\,\hat{n}}/\langle\hat{n}\rangle = 1/\sqrt{\langle\hat{n}\rangle}$$

Für einen thermischen Zustand erhält man:

$$\begin{aligned}
\langle n\rangle &= \frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\beta\hbar\omega(n+\frac{1}{2})} \\
&= \frac{1}{\tilde{Z}}\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\beta\hbar\omega n} \\
&= -\frac{1}{\tilde{Z}}\frac{\partial}{\partial\beta\hbar\omega}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega n} \\
&= -\frac{1}{\hbar\omega}\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\tilde{Z} \\
&= \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}
\end{aligned}$$

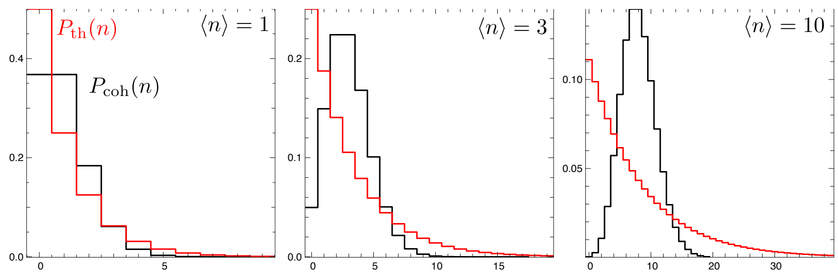

Figure 1: Verteilungen für einen kohärenten Zustand, $P_{\text{coh}}(n)$, und einen thermischen Zustand, $P_{\text{th}}(n)$, bei gleichen Mittelwerten $\langle n\rangle = 1, 3$ und 10.

wobei $\tilde{Z} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega n} = \frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}$ benutzt wurde.

$$\begin{aligned}
\langle n^2\rangle &= \frac{1}{\tilde{Z}} \frac{\partial^2}{\partial(\beta\hbar\omega)^2}\tilde{Z} \\
&= (1-e^{-\beta\hbar\omega})\Big(\frac{e^{-\beta\hbar\omega}}{(1-e^{-\beta\hbar\omega})^2} + 2\frac{e^{-\beta\hbar\omega}e^{-\beta\hbar\omega}}{(1-e^{-\beta\hbar\omega})^3}\Big) \\
&= \langle n\rangle + 2\langle n\rangle\langle n\rangle
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}\langle n\rangle = \langle n\rangle(1+\langle n\rangle)$$

Für einen kohärenten Zustand gehen die relativen Schwankungen für große Photonenzahlen gegen Null, für einen thermischen Zustand sind Schwankungen und Mittelwert hingegen von der selben Größenordnung $\sqrt{\mathrm{Var}\langle n\rangle} \sim \langle n\rangle$.