Statistische Physik und Thermodynamik

WS 2010/2011, Studienziel Bachelor, TP-4

Dozent: F. Marquardt   Übungen: B. Kubala

Übungsblatt 8   Abgabe: 16.12. 2010

Präsenzaufgaben

Aufgabe 17 : Cluster-Entwicklung

Wir betrachten die sogenannte Cluster-Entwicklung für den Effekt von Wechselwirkung auf die Zustandsgleichung eines Gases. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass sich der Druck des Gases darstellen lässt als,

$$p = nk_BT\left[1 - b_2(n\lambda_{\text{th}}^3) + \ldots\right] \quad \text{mit} \qquad b_2 = (2\lambda_{\text{th}}^3)^{-1}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\left(e^{-\beta U(|\vec{r}|)} - 1\right) \ .$$

a) Wir betrachten die Gasteilchen zuerst als harte Kugel mit Radius R. Dann ist die Wechselwirkung zwischen zwei Gasteilchen durch das Potential

$$U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = U(\vec{r}) = U(r) = \begin{cases} +\infty & : \quad r < A \\ 0 & : \quad r \geq A \end{cases}$$

mit $A = 2R$ gegeben. Berechnen Sie die Korrektur b_2 zur Zustandsgleichung. Wieso ist die Korrektur zum Druck temperaturunabhängig?

b) Wir betrachten nun ein Potential, das für mittlere Abstände der Teilchen anziehend wirkt,

$$U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = U(\vec{r}) = U(r) = \begin{cases} +\infty & : \quad r < A \\ -|U_0| & : \quad A \leq r < B \\ 0 & : \quad r \geq B \end{cases} \ .$$

Bestimmen Sie die Korrektur für diesen Fall und skizzieren Sie die Temperaturabhängigkeit von $p/(nk_BT)$.

Aufgabe 18 : Heisenberg-Spins in Molekularfeldnäherung

Wir betrachten die ferromagnetische Wechselwirkung zwischen klassischen Spins in d Dimensionen. Die Energie sei durch

$$E = -\tilde{J}\sum_{l,\, i=\mathrm{NN}(i)} \vec{S}_l\vec{S}_i = -2J\sum_{\langle l,\, i\rangle}\vec{\sigma}_l\vec{\sigma}_i \quad \text{mit} \qquad J > 0$$

gegeben, wobei $\vec{\sigma}_i$ Vektoren der Länge 1 sind und wir kein äußeres magnetisches Feld anlegen.

a) Betrachten Sie das System in der Molekularfeldnäherung und zeigen Sie, dass die Selbstkonsistenzgleichung für den mittleren Spin $\bar{\vec{\sigma}} =: \bar{\sigma}\vec{e}_z$ durch

$$\bar{\sigma} = L(\beta 4Jd\bar{\sigma})$$

mit der Langevin-Funktion $L(x) = \coth x - \frac{1}{x}$ gegeben ist.

b) Skizzieren Sie, wie man geometrisch die Lösung der Selbstkonsistenzgleichung bestimmt und finden sie die Temperatur T_c des ferromagnetischen Phasenüberganges.

Hausaufgaben

Hausaufgabe 17 : Ferromagnetische Spins im Magnetfeld *(7 Punkte)*

Wir betrachten ein ferromagnetisches Ising-Modell für $N = 2$ Spins $\sigma_1,\ \sigma_2$:

$$E = -2J\,\sigma_1\sigma_2 - \mu B(\sigma_1 + \sigma_2)\ , \qquad J > 0,\ \sigma_{1,2} = \pm 1\,.$$

a) Zunächst sei das äußere Magnetfeld $B = 0$. Berechnen Sie die Zustandssumme Z und daraus die spezifische Wärme C_V, und skizzieren Sie C_V als Funktion der Temperatur.
b) Nun sei $B \neq 0$. Berechnen Sie wieder Z, die freie Energie F und daraus die mittlere Magnetisierung $\langle\bar{\sigma}\rangle$.
c) Berechnen Sie die Suszeptibilität, $\chi = \frac{\partial N\mu\langle\bar{\sigma}\rangle}{\partial B}$, aus der in der Vorlesung definierten dimensionslosen Größe $\partial\langle\bar{\sigma}\rangle/\partial b$ mit $b = \mu B/(k_B T)$. Berechnen und skizzieren Sie $\chi(T)|_{B=0}$.
d) Berechnen Sie (für $B = 0$) die Fluktuationen der Magnetisierung und überprüfen Sie den in der Vorlesung diskutierten Zusammenhang zwischen Antwort und Fluktuationen.

Hausaufgabe 18 : Phasenübergang in Molekularfeldnäherung *(5 Punkte)*

Wir betrachten wie in der Vorlesung einen Phasenübergang in der Molekularfeldnäherung. Nehmen Sie dazu an, Sie haben die Selbstkonsistenzgleichung für den mittleren Spin $\bar{\sigma}$ gefunden:

$$\bar{\sigma} = g(\bar{\sigma})$$

mit einer Funktion $g(\sigma)$ mit $g(-\bar{\sigma}) = -g(\bar{\sigma})$.

Geben Sie die zwei ersten Terme der Entwicklung von $g(\bar{\sigma})$ für kleine $\bar{\sigma}$ an. Die Entwicklungskoeffizienten sind temperaturabhängig und können um $T = T_c$ entwickelt werden. Bestimmen Sie für die nichttriviale Lösung $\bar{\sigma} > 0$ der Selbstkonsistenzgleichung die Größe $\bar{\sigma}^2$ in führender Ordnung in $T - T_c$ und finden Sie den kritischen Exponenten des Phasenüberganges.