Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik II

Wintersemester 2013/14, Universität Erlangen-Nürnberg, Dozent: Prof. Florian Marquardt

Blatt 7 - Abgabetermin: Mittwoch, 04.12.2013, in der Vorlesung

Exercises for the course Quantum Mechanics II

Winter term 2013/14, Universität Erlangen-Nürnberg, Prof. Florian Marquardt

Sheet 7 - Deadline: Wednesday, 04.12.2013, during the lecture

Präsenzübungen (Exercises during the tutorial)

Allgemeiner Hinweis: Fertigen Sie so oft wie möglich saubere Skizzen an, in denen auch wesentliche Längen, Frequenzen, Periodizitäten etc. vermerkt sind. Überlegen Sie sich selbst weitergehende Fragestellungen.

General hint: Whenever possible, always make clear sketches that include essential length and frequency scales, periodicities etc. Also think about other possible questions.

1. System von Fermionen in Superpositionszuständen

Es gelten die fermionischen Vertauschungsrelationen, also $\left\{\hat{c}_i, \hat{c}_j^\dagger\right\} = \hat{c}_i\hat{c}_j^\dagger + \hat{c}_j^\dagger\hat{c}_i = \delta_{i,j}$ und $\{\hat{c}_i, \hat{c}_j\} = \left\{\hat{c}_i^\dagger, \hat{c}_j^\dagger\right\} = 0$. Es sei folgender Zustand mit zwei Fermionen gegeben:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(\hat{c}_3^\dagger + e^{i\varphi}\hat{c}_4^\dagger)(\hat{c}_1^\dagger + e^{i\theta}\hat{c}_2^\dagger)\,|0\rangle\ .$$

Berechnen Sie

$$\left\langle \Psi \left| \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_1 \right| \Psi \right\rangle$$

und

$$\left\langle \Psi \left| \hat{c}_4^\dagger \hat{c}_1 \right| \Psi \right\rangle\ .$$

1. Fermionic superposition states

The fermionic commutation relations are given by $\left\{\hat{c}_i, \hat{c}_j^\dagger\right\} = \hat{c}_i\hat{c}_j^\dagger + \hat{c}_j^\dagger\hat{c}_i = \delta_{i,j}$ and $\{\hat{c}_i, \hat{c}_j\} = \left\{\hat{c}_i^\dagger, \hat{c}_j^\dagger\right\} = 0$. Consider the following state of two fermions:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(\hat{c}_3^\dagger + e^{i\varphi}\hat{c}_4^\dagger)(\hat{c}_1^\dagger + e^{i\theta}\hat{c}_2^\dagger)\,|0\rangle\ .$$

Evaluate

$$\left\langle \Psi \left| \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_1 \right| \Psi \right\rangle$$

and

$$\left\langle \Psi \left| \hat{c}_4^\dagger \hat{c}_1 \right| \Psi \right\rangle\ .$$

2. Zwei Fermionen: Interferenz in der Zweiteilchendetektion

Betrachten Sie einen Zwei-Fermionen-Anfangszustand ($j_1 \neq j_2$)

$$|\Psi(0)\rangle = \hat{c}^\dagger_{j_1}\hat{c}^\dagger_{j_2}|0\rangle ,$$

wobei $|0\rangle$ den "Vakuumzustand" darstellt, bei dem keine Fermionen im System sind. Nehmen Sie an, es liegt ein System ohne Wechselwirkung vor. Auch hier kann ein Propagator $G(l-j,t)$ eingeführt werden. Es gelte also:

$$\hat{c}_l(t) = \sum_j G(l-j,t)\hat{c}_j(t) .$$

Zeigen Sie:

(1.) $\left\langle \hat{c}^\dagger_l(t)\hat{c}_l(t)\right\rangle$ zeigt zu keiner Zeit ein Interferenzmuster, d.h. kann als Summe der Resultate geschrieben werden, die man erhalten würde, wenn bei $t=0$ nur ein einziges Fermion bei j_1 bzw. bei j_2 wäre.

(2.) Berechnen Sie nun auch hier die Dichte-Dichte-Korrelation, also die Wahrscheinlichkeit, zu einem Zeitpunkt t gleichzeitig ein Fermion bei l_1 und eines bei l_2 zu detektieren (das "fermionische Hanbury Brown Twiss Experiment"):

$$\left\langle \hat{c}^\dagger_{l_1}(t)\hat{c}_{l_1}(t)\hat{c}^\dagger_{l_2}(t)\hat{c}_{l_2}(t)\right\rangle$$

Was ist der Unterschied zum bosonischen Resultat?

2. Two fermions: interference in two-particle detection

Consider the following two-fermion state ($j_1 \neq j_2$)

$$|\Psi(0)\rangle = \hat{c}^\dagger_{j_1}\hat{c}^\dagger_{j_2}|0\rangle ,$$

where $|0\rangle$ is the vacuum state, which contains no fermions. Assume the particles are not interacting, in which case we can introduce the single-particle propagator $G(l-j,t)$. Thus:

$$\hat{c}_l(t) = \sum_j G(l-j,t)\hat{c}_j(t) .$$

Prove that:

(1.) $\left\langle \hat{c}^\dagger_l(t)\hat{c}_l(t)\right\rangle$ does not show intererence for any time t, i.e. can be written as the sum of the results that would be obtained if at $t=0$ there would have been just a single fermion either at j_1 or at j_2.

(2.) Evaluate time-dependent density-density correlations, i.e. the probability to detect one fermion at l_1 and the other at l_2 at time t (this is the "Fermionic Hanbury Brown Twiss Experiment"):

$$\left\langle \hat{c}^\dagger_{l_1}(t)\hat{c}_{l_1}(t)\hat{c}^\dagger_{l_2}(t)\hat{c}_{l_2}(t)\right\rangle$$

How do these compare to the bosonic result?

Hausaufgabe (Homework)

3. Wechselwirkungsmatrixelemente

Betrachten Sie eine punktförmige ("Kontakt"-)Wechselwirkung der Form

$$V(x_1 - x_2) = g\delta(x_1 - x_2)\,,$$

wie man sie sehr oft zur Beschreibung bosonischer Atome verwendet ("s-Wellenstreuung"). Gegeben sei eine Einteilchenbasis $\phi_l(x)$. Berechnen Sie die Matrixelemente der Wechselwirkung, also

$$\langle j_1, j_2 \,|V|\, i_1, i_2\rangle = \int dx_1 dx_2 \phi^*_{j_1}(x_1)\phi^*_{j_2}(x_2)V(x_1 - x_2)\phi_{i_1}(x_1)\phi_{i_2}(x_2)\,.$$

Diskutieren Sie speziell den diagonalen Beitrag $j_1 = j_2 = i_1 = i_2 = j$. Wird dieser groß, wenn das Orbital $\phi_j(x)$ sehr weit ausgedehnt oder sehr stark lokalisiert ist?

3. Matrix elements of a contact interaction

Consider a (point-like) contact interaction of the following form

$$V(x_1 - x_2) = g\delta(x_1 - x_2)\,.$$

Such interactions are often applied to the description of bosonic atoms (s-wave scattering). For a given single-particle basis $\phi_l(x)$, evaluate the matrix elements of the interaction, i.e.

$$\langle j_1, j_2 \,|V|\, i_1, i_2\rangle = \int dx_1 dx_2 \phi^*_{j_1}(x_1)\phi^*_{j_2}(x_2)V(x_1 - x_2)\phi_{i_1}(x_1)\phi_{i_2}(x_2)\,.$$

Focus on the diagonal contribution $j_1 = j_2 = i_1 = i_2 = j$. In which case is this largest, when the single-particle orbital $\phi_j(x)$ is strongly localized or when it is delocalized?

4. Lokalisierte Orbitale

Es ist oft sehr nützlich, eine Basis von lokalisierten Wellenfunktionen zu konstruieren, selbst, wenn diese dann nicht die Energieeigenbasis ist. Zeigen Sie, dass (in 1D) die Wellenfunktionen

$$\phi_{l,n}(x) = \frac{1}{\mathcal{N}} \int_{k_n}^{k_n + \delta k} dk\, e^{ik(x - x_l)}$$

eine Orthonormalbasis bilden, wenn man setzt $k_n = n\delta k$ und $x_l = l\delta x$. Wie muss δx gewählt werden, wenn δk vorgegeben ist? Wie muss $\mathcal{N}$ gewählt werden? Wie sieht $\mathrm{Re}(\phi_{l,n}(x))$ aus (Skizze)? Wie sieht $|\phi_{l,n}(x)|^2$ aus? Wie entwickelt sich $\phi_{l,n}(x,t)$ in der Zeit, wenn $\phi_{l,n}(x, t = 0) = \phi_{l,n}(x)$ und es sich um ein freies Teilchen der Masse m in 1D handelt?

4. Localized orbitals

It is often useful to construct a basis of localized wave functions, even if it does not constitute an energy eigenbasis. Prove that the 1D wave functions

$$\phi_{l,n}(x) = \frac{1}{\mathcal{N}} \int_{k_n}^{k_n + \delta k} dk\, e^{ik(x - x_l)}$$

with $k_n = n\delta k$ and $x_l = l\delta x$ constitute an orthonormal basis. How should one choose δx for given δk? And how should $\mathcal{N}$ should be chosen? Please make sketches of $\mathrm{Re}(\phi_{l,n}(x))$ and $|\phi_{l,n}(x)|^2$? How does $\phi_{l,n}(x,t)$ evolve in time if $\phi_{l,n}(x, t = 0) = \phi_{l,n}(x)$ in case of a free particle with mass m and in 1D?

*-Aufgabe: Weder Fermion noch Boson

Es sei in zwei Raumdimensionen ein System von identischen Teilchen gegeben, die sich nicht durchdringen können. Überlegen Sie sich, wie deshalb physikalisch eine Vertauschung zweier Teilchen vonstatten gehen muss (durch langsame Bewegung der Teilchen in der Ebene). Zeigen Sie, dass deshalb hier, in 2D, beim Teilchenaustausch ein beliebiger Phasenfaktor entstehen darf, der aber von der Art der Vertauschung abhängt (wie?):

$$\Psi(\text{nachher}) = e^{\pm i\varphi}\Psi(\text{vorher})$$

Solche merkwürdigen Teilchen sind als Anregungszustände im sogenannten fraktionalen Quanten-Hall-Effekt beobachtet worden, der sich bei tiefen Temperaturen in einem 2D System von Elektronen herausbildet, welches an einer Grenzfläche in einer Halbleiterstruktur entsteht.

***-Excercise: Neither Fermion nor Boson**

Consider a two-dimensional system of identical particles that cannot pass through each other. Discuss how the exchange of two particle could be achieved physically (i.e. by slowly moving the two particles). Prove that, in this 2D case, such an exchange of particles can give rise to an arbitrary phase in the wave function:

$$\Psi(\text{after}) = e^{\pm i\varphi}\Psi(\text{before})$$

How does this phase depend on the way the exchange is performed? Such phases can not be realized with bosons nor with fermions. These peculiar particles have been observed as the excited states of so-called fractional quantum Hall systems, which form from electrons at low temperatures and at an interface in a 2D semi-conductor structure.