Übungen zur Vorlesung Quantenmechanik II

Wintersemester 2012/13, Universität Erlangen-Nürnberg, Dozent: Prof. Florian Marquardt

Blatt 4 - Abgabetermin: Mittwoch, 13.11.2013, in der Vorlesung

Exercises for the course Quantum Mechanics II

Winter term 2012/13, Universität Erlangen-Nürnberg, Prof. Florian Marquardt

Sheet 4 - Deadline: Wednesday, 13.11.2013, during the lecture

Präsenzübungen (Exercises during the tutorial)

Allgemeiner Hinweis: Fertigen Sie so oft wie möglich saubere Skizzen an, in denen auch wesentliche Längen, Frequenzen, Periodizitäten etc. vermerkt sind. Überlegen Sie sich selbst weitergehende Fragestellungen.

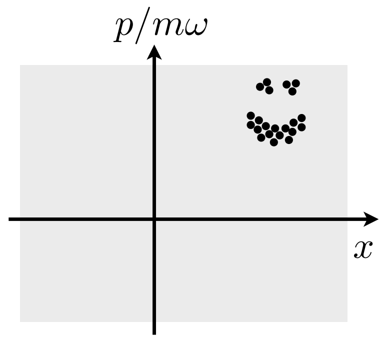
General hint: Whenever possible, always make clear sketches that include essential length and frequency scales, periodicities etc. Also think about other possible questions.

1. Phasenraumdynamik

Betrachten Sie einen klassischen harmonischen Oszillator, der mit einem Ensemble von verschiedenen Anfangsbedingungen gestartet wird. Wie entwickelt sich die unten abgebildete Punktwolke im Phasenraum im Lauf der Zeit? Wie sieht dementsprechend die Ortsverteilung zu jedem Zeitpunkt aus? Was würde für einen anharmonischen Oszillator passieren, bei dem die Frequenz langsam mit der Amplitude anwächst?

1. Dynamics in phase space

Consider a classical harmonic oscillator described by an ensemble of initial conditions. How does the phase-space-point cloud shown below evolve as a function of time? How does the corresponding position distribution look like at any fixed time. What would happen to a harmonic oscillator whose frequency increases slowly with the amplitude?



2. Gequetschte Zustände

Betrachten Sie die Bogoliubov-Transformation $\hat{a}' = \hat{a}\cosh\theta + \hat{a}^\dagger \sinh\theta$, mit einem reellen Parameter θ, der den Übergang zwischen einem alten harmonischen Oszillator (mit Frequenz ω) auf einen neuen Oszillator (Frequenz ω') charakterisiert. Berechnen Sie damit die mittlere Anregungszahl des *alten* Grundzustandes, wenn man ihn bezüglich der *neuen* Energie-Eigenzustände ausdrückt: Was ist also $\left\langle 0 \left| (\hat{a}')^\dagger \hat{a}' \right| 0 \right\rangle$?

2. Squeezed states

Consider the Bogoliubov transformation $\hat{a}' = \hat{a}\cosh\theta + \hat{a}^\dagger \sinh\theta$, with a real parameter θ which describes the transition between an old oscillator (with frequency ω) to a new one (with frequency ω'). Calculate the average excitation number of the old groundstate in terms of the new energy eigenstates: that is calculate $\left\langle 0 \middle| (\hat{a}')^\dagger \hat{a}' \middle| 0 \right\rangle$?

3. Energieoszillationen zwischen zwei harmonischen Oszillatoren

Wir betrachten zwei gekoppelte harmonische Oszillatoren, mit einer Kopplung in der "rotating wave approximation", also:

$$\hat{H} = \hbar \sum_{j=1}^{2} \omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j - \hbar g (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1)$$

Für den resonanten Fall $\omega_1 = \omega_2 = \omega$: Berechnen Sie die Zeitentwicklung von $\left\langle \hat{a}_1^\dagger(t)\hat{a}_1(t) \right\rangle$, wenn die Werte von $\left\langle \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k \right\rangle$ zum Zeitpunkt $t = 0$ als gegeben angenommen werden. Speziell falls anfangs keine Korrelationen existieren ($\left\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right\rangle = 0$): skizzieren Sie die Entwicklung! Inwieweit entspricht das der klassischen Erwartung?

3. Energy oscillations between two harmonic oscillators

We consider two coupled harmonic oscillators with a coupling in the 'rotating wave approximation',

$$\hat{H} = \hbar \sum_{j=1}^{2} \omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j - \hbar g (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1).$$

For the resonant case $\omega_1 = \omega_2 = \omega$: Calculate the time-evolution of $\left\langle \hat{a}_1^\dagger(t)\hat{a}_1(t) \right\rangle$ as a function of the values of $\left\langle \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k \right\rangle$ for $t = 0$. In particular when no initial correlation exists ($\left\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right\rangle = 0$): Sketch the time-evolution! To which extent it correspond to the classical expectation?

Hausaufgabe (Homework)

4. Nochmal gequetschte Zustände

(a) Zeigen Sie: Der Quetsch-Operator

$$\hat{S}(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\left\{z^* \hat{a}^2 - z(\hat{a}^\dagger)^2\right\}\right)$$

ist unitär, und erhält deswegen die Norm eines Zustandes. Damit ist $\hat{S}(z)\,|0\rangle$ ein korrekt normierter gequetschter Zustand.

(b) Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator mit einer leicht erhöhten Federkonstante, also

$$\hat{H} = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\mu(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2,$$

wobei $\hbar\mu = \delta K \cdot x_{\mathrm{ZPF}}^2/2$ ist (warum?), mit der Zunahme δK in der Federkonstante. Leiten Sie die Heisenbergsche Bewegungsgleichung für $\hat{a}$ her. Zeigen Sie, dass darin Erzeuger und Vernichter gemischt werden. Diese Gleichung könnte mit dem Ansatz $\hat{a}(t) = C(t)\hat{a} + S(t)\hat{a}^\dagger$ gelöst werden, also mit einer zeitabhängigen Bogoliubov-Transformation.

4. Again squeezed states

(a) Show that: the squeezing transformation

$$\hat{S}(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\left\{z^* \hat{a}^2 - z(\hat{a}^\dagger)^2\right\}\right)$$

is unitary and therefore does not change the state normalization. So that $\hat{S}(z)\,|0\rangle$ is a correctly normalized squeezed state.

(b) Consider a harmonic oscillator with a slightly increased spring constant,

$$\hat{H} = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\mu(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2,$$

where $\hbar\mu = \delta K \cdot x_{\mathrm{ZPF}}^2/2$, δK is the spring constant increase (why?). Derive the Heisenberg equation of motion for $\hat{a}$. Show that the annihilation and creation operators are coupled to each other in this equation. It could be solved using the ansatz $\hat{a}(t) = C(t)\hat{a} + S(t)\hat{a}^\dagger$, that is with a time-dependent Bogoliubov-Transformation.

5. Gekoppelte harmonische Oszillatoren: Heisenbergbild

Betrachten Sie die Kopplung ohne "rotating wave approximation":

$$\hat{H} = \hbar\sum_{j=1}^{2} \omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j - \hbar g(\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1)(\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2)$$

Stellen Sie die Heisenberg-Bewegungsgleichungen auf für die Operatoren $\hat{a}_j(t)$. Darin werden Erzeuger und Vernichter gemischt.

5. Coupled harmonic oscillators: Heisenberg picture

Consider the coupling without the "rotating wave approximation":

$$\hat{H} = \hbar\sum_{j=1}^{2} \omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j - \hbar g(\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1)(\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2)$$

Write the Heisenberg equation of motion for $\hat{a}_j(t)$. The creation and annihilation operators are coupled to each other in this equation.