Theorie 3: Vielteilchenphänomene

SS 2011, Studienziel Bachelor, TP-MAT 3

Dozent: F. Marquardt   Übungen: B. Kubala

Übungsblatt 6   Abgabe: 21.06. 2011

Präsenzaufgaben

Aufgabe 12 : Weiße Zwerge

Als weißen Zwerg bezeichnet man einen sehr alten Stern in einer der möglichen Endphasen seines Sternenlebens. Der Stern kann dabei nicht mehr Energie durch Fusion erzeugen und besteht aus N Elektronen und den dazugehörigen vollständig ionisierten Ionenrümpfen (überwiegend besteht der weiße Zwerg aus Sauerstoff und Kohlenstoff, so dass $M_{\text{Ionen}} = 2m_pN$ mit der Protonenmasse m_p). Die Gravitationskräfte zwischen den Ionen wollen den Stern zusammenziehen, was der Entartungsdruck der fermionischen Elektronen verhindert.
Wir wollen ein einfaches Modell eines solchen Sterns betrachten, indem wir die relevanten Energien grob (bis auf numerische Vorfaktoren) abschätzen:
a) Die Gesamtenergie der Elektronen kann zunächst über die Fermienergie (nichtrelativistischer) Elektronen abgeschätzt werden. Nehmen Sie dabei eine konstante Dichteverteilung der Elektronen über den Sternradius R an. Da $E_F \gg k_BT$ können wir $T = 0$ annehmen.
b) Die Gravitationsenergie werde durch $E_{\text{Grav}} \sim -GM^2_{\text{Ionen}}/R$ abgeschätzt. Skizzieren Sie die Gesamtenergie und finden Sie den Sternradius aus deren Minimum. Wie verhält sich der Sternradius für zunehmende Masse des Sterns?
c) Für kleinen Sternradius nimmt die Fermienergie (die kinetische Energie) der Elektronen so stark zu, dass relativistische Effekte wichtig werden. Wir nehmen daher jetzt die ultrarelativistische Dispersionrelation der Elektronen (ultrarelativistisch: für $p \gg m_ec$) $\varepsilon \approx pc = \hbar kc$ an.
Vollziehen Sie dieselben Schritte wie in a) und b). In Abhängigkeit von der Gesamtmasse des Sterns finden Sie nun $R \to \infty$ (dann gilt wieder das nichtrelativistische Ergebnis von oben) oder einen kollabierenden Stern, $R \to 0$, wenn die Masse einen gewissen Schwellenwert übersteigt.
Finden Sie diese maximale Masse (die sog. Chandrasekhar-Masse) eines weissen Zwerges.

Aufgabe 13 : Chemisches Potential in dotierten Halbleitern

Wir betrachten einen (zweidimensionalen) Halbleiter mit Valenz- und Leitungsband wie in Aufgabe 10) skizziert (mit $D_V = D_L$).
Untersuchen Sie nun einen mit Donatoren gedopten Halbleiter. Es befinden sich dann N_D zusätzliche Energieniveaus bei einer Energie E_D knapp unterhalb des Leitungsbandes.
a) Wo befindet sich das chemische Potential für $T = 0$? Skizzieren Sie zunächst ohne Rechnung, wie sich das chemische Potential bei steigender Temperatur verhält.
b) Zur Berechnung der Anzahl der Ladungsträger im Leitungsband, $N_L(T)$, kann man annehmen, dass $\frac{\Delta}{2} - \mu \gg k_BT$ und dass das Valenzband im betrachteten Temperaturbereich vollständig besetzt bleibt. Bestimmen Sie die Temperaturabhängigkeit von N_L.

Hausaufgaben

Hausaufgabe 10 : Zustandsdichte *(6 Punkte)*

Wir betrachten die Dispersionsrelation

$$\varepsilon_{\text{rel}} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} \quad \text{mit } \vec{p} = \hbar\vec{k}$$

für relativistische Teilchen.
a) Skizzieren Sie zuächst die Dispersionrelation und diskutieren Sie die jeweiligen Grenzfälle für kleine und große Wellenzahlen k.
b) Berechnen Sie die Zustandsdichte in drei Dimensionen für die angegebene Dispersionsrelation. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis in den entsprechenden Grenzfällen mit Ihnen bereits bekannten Zustandsdichten.

Hausaufgabe 11 : Mittlere Energie *(3 Punkte)*

Berechnen Sie die mittlere Energie pro Teilchen für ein Fermi-Gas mit Fermi-Energie E_F bei der Temperatur $T = 0$. Betrachten Sie dabei
a) nicht-relativistische Teilchen mit einer Dispersionsrelation $E = p^2/(2m)$ und damit einer Zustandsdichte in drei Dimensionen (vgl. HA 10) von $D(E) \propto \sqrt{E}$
b) ultra-relativistische (d.h. $p \gg mc$) Teilchen mit Dispersionsrelation $E = pc$ und damit einer Zustandsdichte in drei Dimensionen (vgl. HA 10) von $D(E) \propto E^2$.