Theorie 3: Vielteilchenphänomene

SS 2011, Studienziel Bachelor, TP-MAT 3

Dozent: F. Marquardt   Übungen: B. Kubala

Übungsblatt 2   Abgabe: 24.05. 2011

Präsenzaufgaben

Aufgabe 4 : 2-Niveausysteme

Wir betrachten N identische, unabhängige 2-Niveausysteme mit Energien ϵ_0 and $\epsilon_1 = \epsilon_0 + \Delta\,,\ \Delta \geq 0$.
a) Welche möglichen Energiewerte E_n kann das Gesamtsystem annehmen? Bestimmen Sie jeweils die Anzahl verschiedener Zustände, die Energie E_n. haben. Geben sie damit die Zustandsumme Z_N des Gesamtsystemes an.
b) Die Zustandssumme kann auch anders gefunden werden. Zeigen Sie sich dazu, dass Z_N faktorisiert und durch die Zustandssumme eines einzelnen 2-Niveausystems Z_1 ausgedrückt werden kann.
c) Bestimmen Sie die freie Energie F, die mittlere Energie $E = \langle H \rangle$ und die Entropie $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$. Welchen Wert hat die Entropie bei $T = 0$ für $\Delta = 0$ und für $\Delta > 0$.
d) Für eine binomialverteilte Größe m haben wir in der Hausaufgabe 1 gefunden, dass $\sigma^2 = \langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2 = Mp(1-p)$. Finden Sie damit $\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2$.
e) Berechnen Sie die spezifische Wärme $C = \frac{\partial E}{\partial T}$. Überprüfen Sie den allgemeinen Zusammenhang zwischen C und $\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2$.

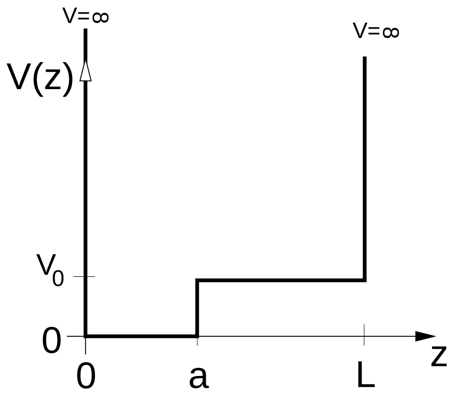
Aufgabe 5 : Paramagnet

Betrachten Sie einen Spin $S \geq \frac{1}{2}\hbar\,,\ 2S/\hbar \in \mathbb{N}$. In einem Magnetfeld $B = B_z$ in z-Richtung kann die z-Komponente des Spins die $2(S/\hbar) + 1$ Werte $-S, (-S+1), \ldots, S$ annehmen. Die Energie des Spins im Magnetfeld ist dann $E_{\sigma_i} = -g\mu_B B_z (S_z/\hbar) =: -\sigma_i \Delta$ mit $\sigma_i = -S/\hbar,\ -(S/\hbar) + 1, \ldots,\ S/\hbar$.
a) Bestimmen Sie die Zustandssumme Z.
b) Finden Sie die Magnetisierung, bzw. $\langle (S_z/\hbar) \rangle$ und skizzieren Sie $\langle S_z/\hbar \rangle$ als Funktion der Temperatur für verschiedene Werte von S. Bestimmen Sie dazu den Grenzwert für $T = 0$ und vergleichen Sie mit dem 2-Niveausystem, um das qualitative Tieftemperaturverhalten zu verstehen.
Für große Temperaturen kann man eine einfache Abschätzung finden, indem man die Besetzungwahrscheinlichkeiten der Zustände, $P_{\sigma_i} = P(E_{\sigma_i})$, im Grenzfall großer Temperatur betrachtet und die Summe im Erwartungswert für große Werte von $|\sigma_i|$ abschätzt.
c) Wir betrachten im folgenden den Grenzfall großer Werte S des Spins.
Finden Sie mit Ihren Ergebnissen aus b) heraus, wie Sie die Magnetisierung auftragen müssen, um eine 'universelle' Kurve für große S zu finden.

Hausaufgaben

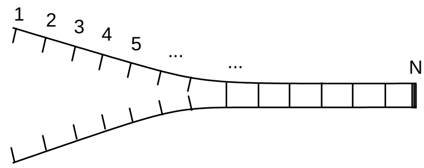
Hausaufgabe 3 : Kanonische Verteilung *(5 Punkte)*

Wir betrachten ein stückweise konstantes Potential $V(z)$ (siehe Skizze).
a) Skizzieren Sie zunächst (ohne Rechnung) die Dichteverteilung eines Gases in diesem Potential für $k_BT \ll V_0$, $k_BT \approx V_0$ und für $k_BT \gg V_0$.
b) Berechnen Sie die korrekt normierte Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(z)$ für ein Gasteilchen in diesem Potential.
c) Berechnen Sie die mittlere Position $\langle z \rangle$ des Teilchens, skizzieren Sie Ihr Ergebnis als Funktion der Temperatur und untersuchen Sie die Grenzfälle $T \to 0$ und $k_BT \gg V_0$.



Hausaufgabe 4 : Reißverschlussmodell für DNA *(7 Punkte)*

Die Zustände eines doppelstrangigen Polymers (DNA) werden in einem einfachen Modell wie folgt festgelegt:



Die beiden Stränge können an den Stellen $1, 2, \ldots, N$ Bindungen miteinander eingehen. Eine geschlossene Bindung hat die Energie $\epsilon_0 = 0$, eine geöffnete die Energie $\epsilon \neq 0$. Die p-te Bindung kann nur geöffnet werden, wenn alle Bindungen $1, 2, \ldots, p-1$ offen sind (siehe Skizze). Die N-te Bindung kann nicht geöffnet werden.

Wenn $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ die Zahl der offenen Bindungen bezeichnet, dann sind die zugehörigen Energien also $n\epsilon$.

a) Bestimmen Sie die Zustandssumme Z und drücken Sie sie als Funktion von $x = e^{-\beta\epsilon}$ aus.

[Zwischenergebnis: $Z = (1 - x^N)/(1 - x)$.]

b) Berechnen Sie die mittlere Zahl $\langle n \rangle$ der offenen Bindungen.

c) Betrachten Sie jetzt zusätzlich den Spezialfall $\epsilon = 0$, und berechnen Sie dafür nochmals Z und $\langle n \rangle$, sowie $\langle n \rangle / N$ für $N \to \infty$.