Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg

WS 2012/2013

Institut für Theoretische Physik II
Prof. Dr. F. Heidrich-Meisner
Sprechstunde: Do. 9-11 Uhr, Raum 02.782.
E-mail: heidrich-meisner@lmu.de

8. Übungsblatt Many-body physics with ultra-cold atomic gases

02.12.2012
Besprechung: Mittwoch, 12.12.2012

8.1: Doppelmuldenpotential

Wir betrachten Bosonen in einem Doppelmuldenpotential und nehmen an, dass jeweils nur der Grundzustand in einer Mulde besetzt sein kann. Wir bezeichnen den Zustand eines Bosons in der linken(rechten) Mulde mit $|\psi_1\rangle$ ($|\psi_2\rangle$). Der Hamiltonoperator ist:

$$H = \frac{U}{2} \sum_{i=1,2} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_i - J(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2)\,. \tag{1}$$

Der erste Term beschreibt eine repulsive Wechselwirkung ($U > 0$) zwischen Bosonen in derselben Mulde, der zweite Term beschreibt Tunnelprozesse zwischen den beiden Mulden.

(a) Drücken Sie den Wechselwirkungsterm durch $\hat{N}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ aus.

(b) Diagonalisieren Sie den Hamiltonoperator für $U = 0$ und zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator als
$$H = -J\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ + J\hat{a}_-^\dagger \hat{a}_-\,.$$
geschrieben werden kann. Interpretieren Sie dieses Ergebnis.

(c) Wir wollen jetzt das wechselwirkende Problem Glg. (1) im Rahmen einer klassischen Rechnung lösen. Starten Sie, indem Sie die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen für $\hat{a}_1$ und $\hat{a}_2$ angeben. Wir ersetzen dann die Operatoren durch ihre Erwartungswerte, die im allgemeinen komplex sind (also z.B. $\hat{a}_1 \to \langle \hat{a}_1 \rangle = a_1$).

(d) Leiten Sie eine Gleichung für den Teilchenstrom von einer Mulde zur anderen her, d.h., finden Sie die Bewegungsgleichung für N_i. Verwenden Sie dabei die Bogoliubov-Näherung $a_i = \sqrt{N_i} e^{i\phi_i}$.

(e) Leiten Sie die Bewegungsgleichung für ϕ_i ab.

(f) Finden Sie eine klassische Hamiltonfunktion $\mathcal{H} = \mathcal{H}(N_1, N_2, \phi_1, \phi_2)$, die auf dieselben Bewegungsgleichungen für ϕ_i und N_i führt (fassen Sie $(N_i, \phi_i); i = 1, 2$ als Paare konjugierter Variable auf). Finden Sie das Minimum E_0 von $\mathcal{H}$ unter der Randbedingung $N = N_1 + N_2$.

(g) Begründen Sie, dass die Bewegungsgleichungen aus (d) und (e) für kleine Abweichungen von den Gleichgewichtswerten von N_i und ϕ_i auf

$$\frac{d}{dt}(N_1 - N_2) = 2\frac{JN}{\hbar}(\phi_1 - \phi_2) \tag{2}$$

$$\hbar\frac{d}{dt}(\phi_1 - \phi_2) = -\left(U + \frac{2J}{N}\right)(N_1 - N_2) \tag{3}$$

führen. Leiten Sie daraus eine Bewegungsgleichung für $N_1 - N_2$ ab. Was folgt für den Typ der Anregungen?

8.2: Gequetschte Zustände

In der Vorlesung wurde ein biquadratischer bosonischer Hamiltonian der Form

$$H = \epsilon_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \epsilon_1(\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a})$$

diagonalisiert. Der Grundzustand ist durch $\alpha|\psi_0\rangle = 0$ definiert.

(a) Wie ist der Operator α definiert?

(b) Wir betrachten die Operatoren X_1 und X_2:

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger); \;\; X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger).$$

Berechnen Sie $\langle X_1^2 \rangle$ und $\langle X_2^2 \rangle$ im Zustand $|\psi_0\rangle$. Was ergibt sich für die Unschärfe in diesem Zustand?

(c) Was besagt die Unschärferelation für X_1, X_2?